T.C.
MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI

HAYAT BOYU ÖĞRENME GENEL MÜDÜRLÜĞÜ
AÇIK ÖĞRETİM DAİRE BAŞKANLIĞI

MATEMATİK
8. SINIF

DERS KİTABI

YAZAR
Ayşen AKTAŞ

ANKARA 2023

MEB HAYAT BOYU ÖĞRENME GENEL MÜDÜRLÜĞÜ YAYINLARI
AÇIK ÖĞRETİM OKULLARI

Dil Uzmanı
Bülent Kenan ERKAN

Görsel Tasarım Uzmanı
Fatih SAĞLAM
YÜMER

Grafik Tasarım Uzmanı
YÜMER

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif ERSOY

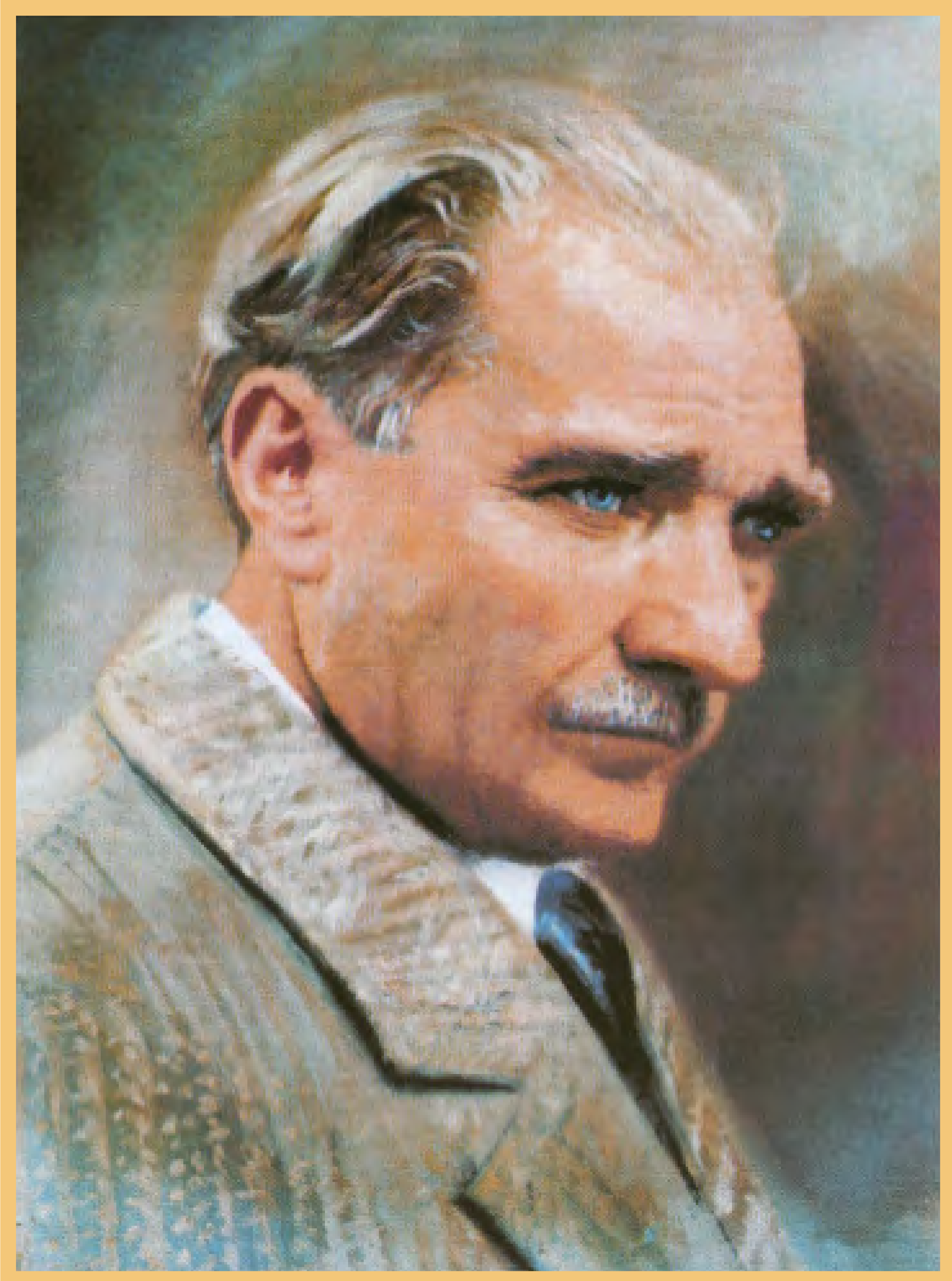
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrumetmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



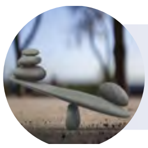
MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

1.ÜNİTE: SAYILAR VE İŞLEMLER

2.ÜNİTE: KAREKÖKLÜ İFADELER VE VERİ ANALİZİ

3.ÜNİTE: OLASILIK VE CEBİRSEL İFADELER



4.ÜNİTE: DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

5.ÜNİTE: GEOMETRİ

6.ÜNİTE: DÖNÜŞÜMLER VE GEOMETRİK CİSİMLER

1. ÜNİTE

SAYILAR VE İŞLEMLER

ÜNİTE KONULARI

- ▶ ÇARPANLAR VE KATLAR
- ▶ ÜSLÜ İFADELER

1. ÜNİTE

• ÇARPANLAR VE KATLAR
• ÜSLÜ İFADELER

NELER ÖĞRENECEĞİZ ?

Bu ünitenin birinci bölümününde;

- Pozitif bir tam sayının pozitif tam sayı çarpanlarını bulmayı,
- İki doğal sayının en büyük ortak bölenini (EBOB) hesaplamayı,
- İki doğal sayının en küçük ortak bölenini (EKOK) hesaplamayı,
- Verilen iki doğal sayının aralarında asal olup olmadığını bulmayı öğreneceğiz.

Bu ünitenin ikinci bölümününde;

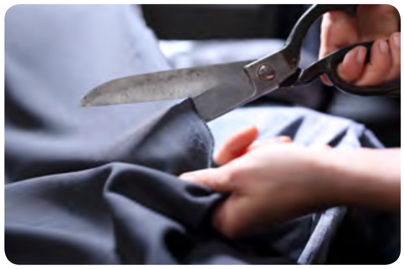
- Tam sayıların, tam sayı kuvvetlerini hesaplamayı,
- Üslü ifadelerle ilgili temel kuralları,
- Sayıların ondalık gösterimlerini 10'un tam sayı kuvvetlerini kullanarak çözümlemeyi,
- Bir sayı 10 'un farklı tam sayı kuvvetlerini kullanarak ifade etmeyi,
- Çok büyük ve çok küçük sayıları bilimsel gösterimle ifade etmeyi ve karşılaştırmayı öğreneceğiz.

ANAHTAR KAVRAMLAR

- En büyük ortak bölen (EBOB)
- Çok büyük ve çok küçük sayılar
- En küçük ortak bölen (EKOK)
- Bilimsel gösterim

ÇARPANLAR VE KATLAR

Ebru ile Özge dikdörtgen şeklinde ve farklı boyutlardaki masalarını kumaşla kaplamak için kumaşçıdan 40 m^2 kumaş satın aldılar. Sizce 40 m^2 lik kumaş ile kaplanacak masanın boyutları kaç farklı değer alabilir? Söyleyiniz.



Örnek:

20 sayısının pozitif tam sayı çarpanlarının bulalım.

Çözüm

20 sayısını aşağıdaki gibi farklı sayıların çarpımı şeklinde yazalım.

$20 = 1 \cdot 20$

1. çarpan   2. çarpan

$20 = 2 \cdot 10$

1. çarpan   2. çarpan

$20 = 4 \cdot 5$

1. çarpan   2. çarpan

20 sayısının çarpanları 1, 2, 4, 5, 10, 20 dir.

Bunların bazıları asal, bazıları ise asal değildir.

BİLGİ KUTUSU

Bir pozitif tam sayı, farklı pozitif tam sayıların çarpımı şeklinde yazılır.

Bu tam sayıların her birine o sayının **çarpanı** denir.

Bu çarpanlara aynı zamanda o sayının **bölenleri** denir.

Örnek:

48 sayısının pozitif tam sayı çarpanlarını yazalım.

Çözüm

$48 = \boxed{1} \cdot \boxed{48}$

$48 = \boxed{2} \cdot \boxed{24}$

$48 = \boxed{3} \cdot \boxed{16}$

$48 = \boxed{4} \cdot \boxed{12}$

$48 = \boxed{6} \cdot \boxed{8}$

48 sayısının pozitif tam sayı çarpanları 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 ve 48'tir.

Örnek:

23 sayısının çarpanlarını bulalım.

Çözüm

23 = 1 . 23

23'ün çarpanları 1 ve 23'tür.

BİLGİ KUTUSU

1 ve kendisinden başka çarpanı olmayan 1'den büyük doğal sayılara **asal sayı** denir.

Örnek:

30 sayısının asal sayı olan çarpanlarını bulalım.

Çözüm

30	2	→ 30'u 2'ye bölelim.
15	3	→ 2'ye bölünmediği için 15'i 3'e bölelim.
5	5	→ 3'e bölünmediği için 5'i 5'e bölelim.
1		

30 sayısının asal çarpanları 2, 3 ve 5'tir.

30 sayısının pozitif tam sayı çarpanları 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ve 30'dur.

30 sayısını üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazalım.

$30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

BİLGİ KUTUSU

Bir pozitif tam sayıyı asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazmaya **asal çarpanlara ayırma** denir.

Örnek:

18, 150 ve 360 sayılarını üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$18 = 2 \,.\, 3 .\, 3 = 2 \,.\, 3^2$

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

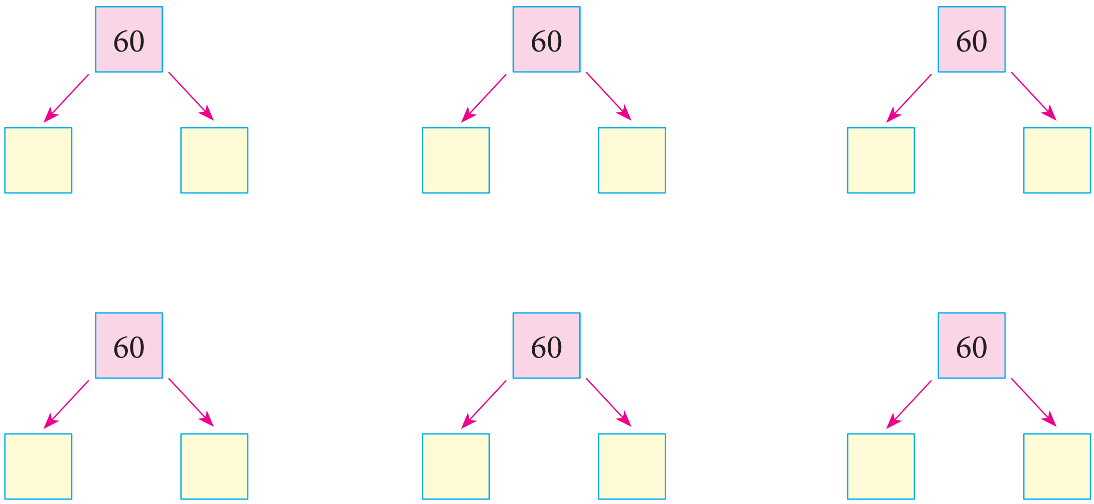
$150 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^2$

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5$

ALIŞTIRMALAR

1- **60 sayısının pozitif tam sayı çarpanlarını bulunuz. İlgili çarpanları kutucukların içine yazınız.**



2- **Aşağıdaki sayıların asal çarpanlarını bulunuz. Noktalı yerlere yazınız.**

32 : ....

80 : ....

45 : ....

200 : ....

3- **Aşağıdaki sayıların asal çarpanlarını bularak üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazınız.**

70

124

540

En Büyük Ortak Bölen (EBOB)

Okul gezisi için Gaziantep'e giden 24 kız ve 27 erkekten oluşan bir kafile otele yerleşecektir. Kız ve erkek öğrenciler ayrı odalara, eşit sayıda ve dışarda kimse kalmayacak şekilde yerleştirilecektir.

Buna göre otelde en az kaç tane oda kiralamalıdır?

Örnek:

18 ve 20 sayılarının bölenlerini bulalım.

Çözüm

18 in bölenleri : 1, 2, 3, 6, 9, 18

20 nin bölenleri : 1, 2, 4, 5, 10, 20

18 ve 20 nin ortak bölenleri : 1 ve 2'dir.

En büyük ortak bölen ise 2'dir. Büyük parçalardan eş küçük parçalara gidildiği için en büyük ortak böleni bulduk.

BİLGİ KUTUSU

İki ya da daha fazla doğal sayının ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların **en büyük ortak böleni** denir.

En büyük ortak bölen **EBOB** şeklinde gösterilir.

Örnek:

36 ile 64 sayılarının EBOB'unu bulalım.

Çözüm

1. Yol: 36 ile 64'ün ortak bölenleri içerisinden en büyüğünü bulalım.

36'nın bölenleri : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

64'ün bölenleri : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

36 ile 64'ün ortak bölenleri: 1, 2 ve 4'tür.

Buna göre 36 ile 64'ün en büyük ortak böleni 4'tür.

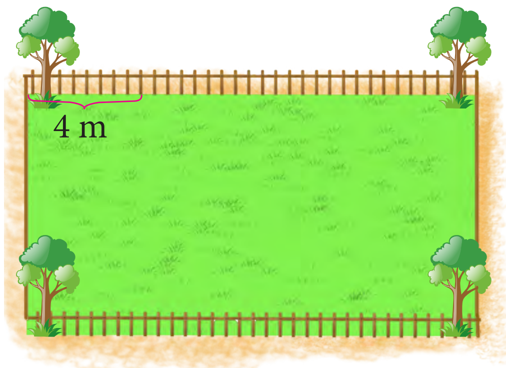
2. Yol: 36 ile 64'ü asal çarpanlarına ayıralım.

36	64	2
18	32	2
9	16	2
9	8	2
9	4	2
9	2	2
9	1	3
3		3
1		

Kırmızı ile verilen sayılar hem 36'yı hem de 64'ü bölmektedir. Buna göre EBOB (36, 64) = 2 . 2 = 4'tür.

Problem

Boyutları 20 m ve 36 m olan dikdörtgen şeklindeki bir arsanın etrafına, köşelerine birer tane gelecek şekilde eşit aralıklarla ağaç dikilecektir. Arsanın etrafına en az kaç ağaç dikilir? Bulalım.



Çözüm

Problemi Anlayalım

Verilenler: Dikdörtgen şeklindeki arsanın boyutları 20 m ve 36 m dir. Bu arsanın etrafına, köşelerine birer tane gelecek şekilde eşit aralıklarla ağaç dikilecektir.

İstenen: Arsanın etrafına en az kaç ağaç dikilir?

Problemi Planlayalım

Arsanın etrafına dikilecek ağaçların arasındaki uzaklık ne kadar fazla olursa arsanın etrafına o kadar az ağaç dikilir. Bütünden eşit parçalara gidildiğinden 20 ve 36 sayılarının EBOB'u bulunur.

Planı Uygulayalım

20	36	2
10	18	2
5	9	3
5	3	3
5	1	5
1		

EBOB (20 , 36) = 2 . 2 = 4'tür.

Ağaçların arasındaki en fazla uzaklık 4 m olmalıdır.

Arsanın Çevresi : 2 . (20 + 36) = 112 m'dir.

112 m ye 4 m arayla ağaç dikilirse 112 ÷ 4 = 28

Arsanın etrafına dikilecek en az ağaç sayısı 28 tanedir.

Kontrol Edelim

Arsanın etrafına 4 metre arayla 28 tane ağaç dikilmiştir. 4 x 28 = 112 metre arsanın çevresidir. Çözümümüz doğrudur.

Problem

Ali, pazardan aldığı 30 kg salatalık ile 24 kg domatesi, poşetlere eşit kültede ve artmayacak şekilde paylaştırıyor. Ali bu paylaştırma için en az kaç poşet kullanır? Bulalım.

Çözüm

Problemi Anlayalım

Verilenler: 30 kg salatalık ile 24 kg domates poşetlere eşit kütlede ve artmayacak şekilde paylaştırılıyor.

İstenen: Domates ve salatalık eşit kütleli kaç tane poşete paylaştırılır?

Problemi Planlayalım

Önce 1 tane poşetin kütlesinin kaç kilogram olduğunu bulmak için 30 ile 24'ün EBOB'unu bulalım.

Planı Uygulayalım

24	30	2
12	15	2
6	15	2
3	15	3
1	5	5
	1	

1 tane poşetin kütlesi: EBOB (24 , 30) = 2 . 3 = 6'dır. Domates ve salatalıkların toplam kütlesi: 24 + 30 = 54 kg'dır. Paylaştırma için kullanılacak poşet sayısı: 54 ÷ 6 = 9 olur. Domates ve salatalıklar her biri 6 kilogram olan 9 tane poşete paylaştırılır.

Kontrol Edelim

1 tanesinin kütlesi 6 kilogram olan 9 poşetin toplam 54 kg'a eşit olduğunu bulursak çözümümüz doğrudur.

6 x 9 = 54 kg

En Küçük Ortak Kat (EKOK)

Bir hastanede hemşireler 5 günde bir, doktorlar 8 günde bir nöbet tutmaktadır. Aynı gün nöbet tutan Ayşe hemşire ile Esra doktor en erken hangi gün tekrar birlikte nöbet tutarlar? Düşününüz ve açıklayınız.

Örnek:

8 ve 12'nin en küçük ortak katını bulalım.

Çözüm

8'in katları: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, …

12'nin katları: 12, 24, 36, 48, 60, 72, …

8'in ve 12'nin ortak katları: 24, 48, 72 …… dir. Buna göre en küçük ortak kat 24'tür.

BİLGİ KUTUSU

İki ya da daha fazla doğal sayının ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların **en küçük ortak katı** denir. En küçük ortak kat **EKOK** şeklinde gösterilir.

Problem

Bir doktor hastasına, 8 saatte bir ve 12 saatte bir olmak üzere iki ayrı ilaç veriyor. Hasta iki ilacı da aynı anda içiyor. Buna göre ikinci kez, her iki ilacı birden en az kaç saat sonra içer? Bulalım.

Çözüm

Problemi Anlayalım

Verilenler: Hasta 8 saatte bir ve 12 saatte bir olmak üzere iki çeşit ilacı aynı anda içiyor.

İstenen: Hasta her iki ilacı aynı anda içiyor. İkinci kez her iki ilacı birlikte kaç saat sonra içer?

Problemi Planlayalım

Sırayla birinci ve ikinci ilaçların içilme saatlerini yazalım.

Planı Uygulayalım

Birinci ilaç; 8, 16, 24, 32, 40, 48, … saat,

İkinci ilaç; 12, 24, 36, 48, … saat sonra içilecektir.

Bu ortak katlar arasındaki en küçük sayıyı EKOK ile bulalım.

8	12	2
4	6	2
2	3	2
1	3	3
	1	

EKOK (8 , 12) = $2 . 2 . 2 . 3 = 2^3 . 3 = 8 . 3 = 24$’tür.

Hasta her iki ilacı ayna anda içtikten sonra ikinci kez her iki ilacı birlikte en az 24 saat sonra içer.

Kontrol Edelim

24 sayısı 8 ve 12’ye kalansız olarak bölünürse çözümümüz doğrudur.

$24 \div 8 = 3$, $24 \div 12 = 2$ olur. O hâlde çözümümüz doğrudur.

Problem

Bir hava yolu şirketi 90 dakikada bir İzmir’e 120 dakikada bir Van’a sefer düzenlemektedir. her iki şehre ilk sefer saat 08.00’de dir. Saat 08.00’den sonra İzmir’e ve Van’a aynı anda en erken uçuş saat kaçtadır? Bulalım.

Çözüm

Problemi Anlayalım

Verilenler: İzmir’e 90 dakikada bir Van’a 120 dakikada bir uçuş seferi düzenlenmiştir.

İstenen: Her iki şehre 08.00’de ilk sefer düzenlenmiştir. Bu saatten sonra İzmir’e ve Van’a aynı anda en erken uçuş saat kaçtadır?

Problemi Planlayalım

Çözümü iki yolla yapalım.

1. Yol: İzmir'e ve Van'a uçuş saatlerini yazalım.

İzmir'e uçuş saatleri: 08.00, 09.30, 11.00, 12.30, 14.00, …

Van'a uçuş saatleri: 08.00, 10.00, 12.00, 14.00, …

Yukarıdaki uçuş saatlerini incelediğimizde saat 08.00'den sonraki en erken uçuş saat 14.00'tür. O hâlde İzmir'e ve Van'a saat 08.00'den sonra en erken uçuş saat 14.00'te dir.

2. Yol: 90 ve 120 nin EKOK'unu bulalım.

90	120	2
45	60	2
45	30	2
45	15	3
15	5	3
5	5	5
1	1	

EKOK (90, 120) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$

360 dakika = 6 saat saattir.

$$\begin{array}{r} 08.00 \\ +\ 06.00 \\ \hline 14.00 \end{array}$$

Sabah 08.00 den 6 saat sonra en erken saat 14.00 te her iki şehre uçuş vardır.

Kontrol Edelim

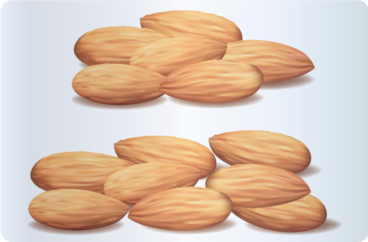
Saat 14.00 den 6 saat geriye gidelim. Saat 08.00'i bulursak çözümümüz doğrudur.

$$\begin{array}{r} 14.00 \\ -\ 08.00 \\ \hline 06.00 \end{array}$$ olur.

O hâlde çözümümüz doğrudur.

Problem

Özge bademlerini altışar ve sekizer saydığında her defasında 2 bademi artıyor. Buna göre Özge'nin en az kaç tane bademi vardır? Bulalım.



Çözüm

Problemi Anlayalım

Verilenler: Özge bademlerini altışar ve sekizer saydığında her defasında 2 bademi artıyor.

İstenen: Özge'nin en az kaç tane bademi vardır?

Problemi Planlayalım

6 ve 8 sayılarının EKOK'unu bulalım.

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & & \end{array}$$

EKOK (6, 8) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$

Her defasında 2 badem arttığına göre

$24 + 2 = 26$

Özge'nin en az 26 tane bademi vardır.

Kontrol Edelim

26 sayısını 24'e bölelim. Kalan 2 olursa çözümümüz doğrudur.

$$\begin{array}{r|l} 26 & 24 \\ \cline{2-2} -24 & 1 \\ \cline{1-1} 02 & \end{array}$$

02 → kalan

Kalan 2 olduğundan çözümümüz doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

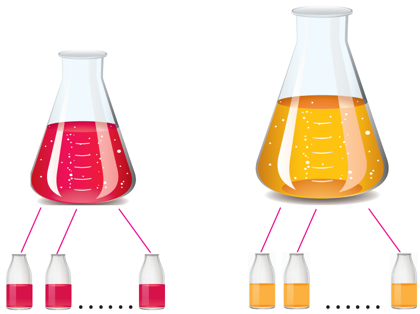
1- Aşağıda verilen sayıların EBOB'larını bulunuz.

a) EBOB (12,18) = ...

b) EBOB (20,30) = ...

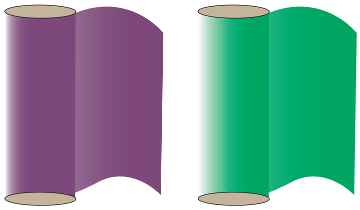
c) EBOB (36,72) = ...

c) EBOB (48,64) = ...

2- 

40 litrelik vişne suyu ile 60 litrelik şeftali suyu, birbirine karışmayacak ve artmayacak şekilde eşit hacimli daha küçük şişelere konulacaktır.

Her bir şişenin hacmi en fazla kaç litre olur?

3- 

72 m uzunluğundaki yeşil karton rulo ile 90 m uzunluğundaki mor karton rulo eşit uzunlukta parçalara bölünmek isteniyor.

Karton rulolar bu şekilde en az kaç parçaya bölünebilir.

4- **Aşağıda verilen sayıların EKOK'larını bulunuz.**

a) EKOK (24,40) = ...

b) EKOK (18,16) = ...

c) EKOK (30,60) = ...

c) EKOK (42,105) = ...

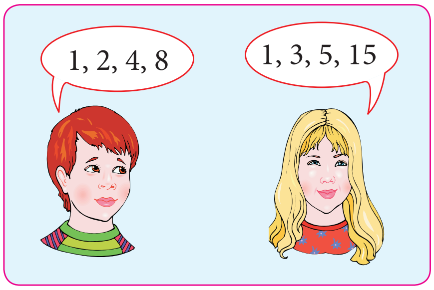
5- Duygu hastanede 10 günde bir, eşi Mehmet ise 8 günde bir nöbet tutmaktadır. 12 Ekim'de aynı anda nöbetçi olan Duygu ve Mehmet **en erken kaç gün sonra tekrar birlikte nöbet tutarlar?**

6- Çağrı kalemliğindeki kalemleri ikişer ikişer veya beşer beşer saydığında her defasında 1 kalem artıyor.

Çağrının en fazla 30 kalemi olduğu bilindiğine göre kalemlikte <u>en az</u> kaç kalem vardır.

Aralarında Asal Sayılar

Öğretmen Can’dan 8’in bölenlerini, Esin’den de 15’in bölenlerini söylemesini istiyor. Sizce Esin ve Can’ın söylediği sayılardan aynı olanlar var mıdır? Yoksa nedeni ne olabilir? Açıklayınız.



Örnek:

25 ve 32 nin EBOB ve EKOK’unu bulalım.

Çözüm

25	32	2
25	16	2
25	8	2
25	4	2
25	2	2
25	1	5
5		5
1		

25 ve 32 nin 1’den başka ortak böleni yoktur. Dolayısıyla bu sayıların EBOB’u 1 e eşittir.

EBOB(25,32) = 1

EKOK(25,32) = $\underbrace{2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 5 . 5} = 2^5 . 5^2 = 32 . 25$ olur.

Yukarıda görüldüğü gibi 25 ile 32 nin EKOK’u bu sayıların çarpımına eşittir.

BİLGİ KUTUSU

İki doğal sayının 1 den başka ortak böleni yoksa bu sayılara **aralarında asal sayılar** denir. Aralarında asal sayıların EBOB’u 1 e, EKOK’u ise bu iki sayının çarpımına eşittir.

Örnek:

8 ile 9 sayılarının aralarında asal olup olmadığını bulalım.

Çözüm

8 in pozitif tam bölenleri : 1, 2, 4, 8

9 un pozitif tam bölenleri : 1, 3, 9

Ardışık sayılar olan 8 ve 9'un ortak böleni sadece 1'dir.

Buna göre 8 ve 9 sayıları aralarında asaldır.

BİLGİ KUTUSU

- Ardışık doğal sayılar aralarında asaldır.
- Ardışık tek doğal sayılar aralarında asaldır.
- 1 ile tüm doğal sayılar aralarında asaldır.

Örnek:

Aralarında asal iki sayının EKOK'u 36'dır. Buna göre bu sayılar hangileridir. Bulalım.

Çözüm

Aralarında asal sayıların EKOK'u bu sayıların çarpımına eşittir.

EKOK (a, b) = 36 olduğuna göre

a . b = 36'dır.

1 . 36 = 36 → 1 ile 36 aralarında asaldır.

2 . 18 = 36 → 2 ile 18 aralarında asal değildir.

3 . 12 = 36 → 3 ile 12 aralarında asal değildir.

4 . 9 = 36 → 4 ile 9 aralarında asaldır.

6 . 6 = 36 → 6 ile 6 aralarında asal değildir.

O hâlde bu sayılar 1 ile 36 ya da 4 ile 9'dur.

Örnek:

Aşağıdaki sayı çiftlerinin aralarında asal olup olmadığını bulalım.

a) 17 ile 19

b) 20 ile 22

c) 1 ile 36

d) 33 ile 34

Çözüm

a) 17 ile 29 ardışık tek doğal sayılar olduğundan aralarında asaldır.

b) 20 ile 22'nin ortak bölenleri 1 ve 2 olduğundan aralarında asal değildir.

c) 1 ile tüm doğal sayılar aralarında asaldır.

d) 33 ile 34 ardışık doğal sayılar olduğundan aralarında asaldır.

Örnek:

(m – 1) ile (2n – 4) sayıları aralarında asaldır. $\frac{m-1}{2n-4}=\frac{14}{16}$ olduğuna göre m ve n sayılarını bulalım.

Çözüm

$\frac{14}{16}$ kesrini pay ve paydası aralarında asal olana kadar sadeleştirelim.

$\frac{14}{16}=\frac{14 \div 2}{16 \div 2}=\frac{7}{8}$ 7 ve 8 aralarında asaldır.

$\frac{m-1}{2n-4}=\frac{7}{8} \Rightarrow$ $m-1=7$ ve $2n-4=8$'dir.

$m=7+1$ $2n=8+4$

$m=8$ $n=6$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Sayılar	Aralarında Asal	Aralarında Asal Değil	Sayıların EKOK'u	Sayıların Çarpımı
15 ile 16				
9 ile 18				
11 ile 13				
1 ile 40				
7 ile 16				

2- Toplamları 8 ve aralarında asal olan iki sayının çarpımının alacağı değerleri bulunuz.

3- (a – 1) ile (b + 1) sayıları aralarında asaldır.

$\frac{a-1}{b+1}=\frac{20}{24}$ **olduğuna göre a ve b sayılarını bulunuz.**

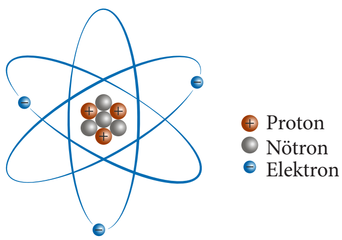
ÜSLÜ İFADELER

Fizik, kimya, biyoloji, tıp, mühendislik alanlarında sayıların gösterimi üslü ifadelerden yararlanarak yapılır.

Güneşle Dünya arasındaki
uzaklık 149.600.000 km
ya da 1496×10^5 km

Güneş ile Dünya arasındaki uzaklığın ve bakterilerin üremesinin hesaplanmasında, ışık hızının ve atomu oluşturan parçacıkların kütlesinin ifade edilmesinde kullanılır.

Ebola Virüsü



Atom Modeli

e: 911×10^{-33} kg

p: 16929×10^{-31} kg

n: 16726×10^{-31} kg

Örnek:

Üslü ifadelerin başka hangi alanlarda kullanıldığını araştırınız. Aşağıda verilen tam sayıların, tam sayı kuvvetlerini bulalım.

a) 3^2 b) $(-4)^3$ c) $(-1)^4$

ç) 0^5 d) 1^{1021} e) $(7)^1$

Çözüm

a) 3 sayısının 2. kuvvetini bulalım.

$3^2 = \underbrace{3\,.\,3}_{2 \text{ tane}} = 9$'dur.

b) -4 sayısının 3. kuvvetini bulalım.

$(-4)^3 = \underbrace{(-4)\,.\,(-4)\,.\,(-4)}_{3 \text{ tane}} = -64$'tür.

c) -1 sayısının 4. kuvvetini bulalım.

$(-1)^4 = \underbrace{(-1)\,.\,(-1)\,.\,(-1)\,.\,(-1)}_{4 \text{ tane}} = 1$'dir.

ç) 0 sayısının 5 kuvvetini bulalım.

$0^5 = \underbrace{0\,.\,0\,.\,0\,.\,0\,.\,0} = 0$'dır.

d) 1 sayısının 1021. kuvvetini bulalım.

$1^{1021} = \underbrace{1\,.\,1\,\ldots\ldots\ldots\,1}_{1021 \text{ tane}} = 1$'dir.

e) 7 sayısının 1. kuvvetini bulalım.

$7^1 = \underbrace{7}_{1 \text{ tane}}$'dir.

BİLGİ KUTUSU

Sıfırdan farklı bir tam sayının kendisiyle tekrarlı çarpımının gösterimine **üslü ifade** denir. a'nın n. kuvveti veya a üssü n ifadesi $a^n = \underbrace{a\,.\,\ldots\ldots a}_{n \text{ tane}}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek:

4^0 ve $(-5)^0$ ifadelerinin değerini bulalım.

Çözüm

Tam sayıların sıfırıncı kuvvetini bulurken o sayının herhangi bir kuvvetini sürekli kendisine böleriz. Buna göre;

$$\begin{array}{l} 4^3 = 64 \\ \downarrow 64 \div 4 \\ 4^2 = 16 \\ \downarrow 16 \div 4 \\ 4^1 = 4 \\ \downarrow 4 \div 4 \\ 4^0 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (-5)^3 = -125 \\ \downarrow (-125) \div (-5) \\ (-5)^2 = 25 \\ \downarrow 25 \div (-5) \\ (-5)^1 = -5 \\ \downarrow (-5) \div (-5) \\ (-5)^0 = 1 \end{array}$$

BİLGİ KUTUSU

a sıfırdan farklı bir tam sayı olmak üzere $\mathbf{a^0 = 1}$'dir.

Örnek:

Aşağıda verilen üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $(-2)^4$ b) $(-3)^5$ c) $(-5)^2$ ç) -2^4

d) -3^5 e) -5^2

Çözüm

a) $(-2)^4 = \underbrace{(-2) \, . \, (-2) \, . \, (-2) \, . \, (-2)}_{\text{4 tane}} = 16$ olur.

b) $(-3)^5 = \underbrace{(-3) \, . \, (-3) \, . \, (-3) \, . \, (-3) \, . \, (-3)}_{\text{5 tane}} = -243$ olur.

c) $(-5)^2 = \underbrace{(-5) \, . \, (-5)}_{\text{2 tane}} = 25$ olur.

ç) $-2^4 = -\underbrace{(2 \, . \, 2 \, . 2 \, . \, 2)}_{\text{4 tane}} = -16$ olur.

d) $-3^5 = -\underbrace{(3 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 3)}_{\text{5 tane}} = -243$ olur.

e) $-5^2 = -\underbrace{(5 \, . \, 5)}_{\text{2 tane}} = -25$ olur.

Örnek:

$(-3)^5$ ile -3^5 ifadelerinin sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$(-3)^5 = (-3) \, . \, (-3) \, . \, (-3) \, . \, (-3) \, . \, (-3) = -243$

$-3^5 = -3 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 3 = -243$

Her iki üslü ifadenin sonucu birbirine eşittir.

$(-3)^5 = -3^5$ olur.

BİLGİ KUTUSU

- $a \in Z^+$ olmak üzere
- n çift sayı ise $(-a)^n = a^n$ dir.

  Negatif tam sayıların çift kuvvetleri pozitiftir.
- n tek sayı ise $(-a)^n = -a^n$ dir.

  Negatif tam sayıların tek kuvvetleri negatiftir.
- Negatif işaret parantezin dışındaysa sonuç her zaman negatiftir.

  $-(a)^n = -a^n$

Örnek:

4^{-3} ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

4 ün 1. kuvvetini 4'e bölelim. 4'ün (–3). kuvvetini bulana kadar elde ettiğimiz sayıyı 4'e bölmeye devam edelim.

$4^1 = 4$ $\quad 4 \div 4$

$4^0 = 1$ $\quad 1 \div 4$

$4^{-1} = \frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{4} \div 4$

$4^{-2} = \frac{1}{16}$ $\quad \frac{1}{16} \div 4$

$4^{-3} = \frac{1}{64}$

Buna göre $4^{-3} = \frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$ eşitliklerini yazarız.

Örnek:

5^{-2} ve $(-3)^{-4}$ ifadelerinin değerini bulalım.

Çözüm

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5.5} = \frac{1}{25}$

$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{(-3).(-3).(-3).(-3)} = \frac{1}{81}$ bulunur.

BİLGİ KUTUSU

$a \in Z^+$ olmak üzere, n tam sayısı için $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dir.

Bir üslü ifadenin pay ve paydası yer değiştirildiğinde üssün işareti de değişir.

Örnek:

4^3, 4^{-3} ve $\frac{1}{4^{-3}}$ **ifadelerinin sonuçlarını karşılaştıralım.**

Çözüm

$4^3 = 4 . 4 . 4 = 64$

$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4.4.4} = \frac{1}{64}$

$\frac{1}{\boxed{4^{-3}}} = \frac{1}{\boxed{\frac{1}{4^3}}} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 1 \cdot \frac{64}{1} = 64$ bulunur.

Buna göre $4^3 = \frac{1}{4^{-3}}$ olduğu görülür.

BİLGİ KUTUSU

$a \in Z^+$ olmak üzere, n tam sayısı için $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ dir.

Örnek:

$\left(\frac{5}{2}\right)^3$ ile $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ ifadelerinin sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{2^{-3}}{5^{-3}} = \frac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{5^3}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{125}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{125}{1} = \frac{125}{8}$$

Her iki ifadenin sonucu birbirine eşittir.

BİLGİ KUTUSU

Sıfırdan farklı a , b tam sayıları için $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$ olur.

Örnek:

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $2^3 . 2^5$

b) $4^3 . 4^4$

Çözüm

a) $2^3 . 2^5 = \underbrace{2 . 2 . 2}_{3\ \text{tane}} . \underbrace{2 . 2 . 2 . 2 . 2}_{5\ \text{tane}} = 2^{3+5} = 2^8$

b) $4^3 . 4^4 = \underbrace{4 . 4 . 4}_{3\ \text{tane}} . \underbrace{4 . 4 . 4 . 4}_{4\ \text{tane}} = 4^{3+4} = 4^7$

BİLGİ KUTUSU

Tabanları eşit olan üslü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken taban aynen yazılır, üslerin toplamı ortak tabana üs olarak yazılır. $a^m . a^n = a^{m+n}$

Örnek:

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $5^3 \div 5^2$ b) $\frac{3^4}{3^8}$

Çözüm

a) $5^3 \div 5^2 = \frac{5^3}{5^2} = \frac{5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{5}} = 5 = 5^1 = 5^{3-2}$

b) $\frac{3^4}{3^8} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4} = 3^{4-8}$

BİLGİ KUTUSU

Tabanları eşit olan üslü ifadelerde bölme işlemi yapılırken taban aynen alınır, üslerin farkı ortak tabana üs olarak yazılır. $\mathbf{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)}$

Örnek:

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $5^4 \cdot 8^4$ b) $2^{100} \cdot 50^{100}$

Çözüm

a) $5^4 \cdot 8^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$

$= (5 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 8)$

$= (5 \cdot 8)^4$

$= 40^4$ olur.

b) $2^{100} \cdot 50^{100} = (2 \cdot 50)^{100} = 100^{100}$ olur.

BİLGİ KUTUSU

Tabanları farklı ve üsleri aynı olan üslü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken tabanlar çarpılır, ortak üs aynen yazılır. $\mathbf{a^x . b^x = (a . b)^x}$

Örnek:

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $2^4 \div 3^4$ b) $\dfrac{5^{12}}{3^{12}}$

Çözüm

a) $2^4 \div 3^4 = \dfrac{2^4}{3^4}$

$= \dfrac{2.2.2.2}{3.3.3.3}$

$= \left(\dfrac{2}{3}\right).\left(\dfrac{2}{3}\right).\left(\dfrac{2}{3}\right).\left(\dfrac{2}{3}\right)$

$= \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$ olur.

b) $\dfrac{5^{12}}{3^{12}} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{12}$

BİLGİ KUTUSU

Tabanları farklı ve üsleri aynı olan üslü ifadelerde bölme işlemi yapılırken tabanlar birbirine bölünür, ortak üs aynen yazılır. $\mathbf{\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x, (b \neq 0)}$

Örnek:

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım. Sonuçlarını karşılaştıralım.

a) $(2^3)^4$ b) $(2^4)^3$

Çözüm

a) $(2^3)^4 = (\underbrace{2 . 2 . 2}_{3 \text{ tane}})^4 = \underbrace{(2 . 2 . 2) . (2 . 2 . 2) . (2 . 2 . 2) . (2 . 2 . 2)}_{4 \text{ tane}} = 2^{12}$

b) $(2^4)^3 = (\underbrace{2 . 2 . 2 . 2}_{4 \text{ tane}})^3 = \underbrace{(2 . 2 . 2 . 2) . (2 . 2 . 2 . 2) . (2 . 2 . 2 . 2)}_{3 \text{ tane}} = 2^{12}$

Elde ettiğimiz sonuçlar birbirine eşittir.

$(2^3)^4 = (2^4)^3$ olur.

BİLGİ KUTUSU

a pozitif bir tam sayı olmak üzere

Üslü ifadelerin kuvveti alınırken üsler çarpılır. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y}$

Örnek:

$\dfrac{36^5}{16^3 . 27^2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\frac{36^5}{16^3 . 27^2} = \frac{(4 . 9)^5}{(2^4)^3 . (3^3)^2} = \frac{(2^2 . 3^2)^5}{2^{12} . 3^6} = \frac{(2^2)^5 . (3^2)^5}{2^{12} . 3^6}$$

$$= 2^{10} . 3^{10} . 2^{-12} . 3^{-6}$$

$$= 2^{10-12} . 3^{10-6} = 2^{-2} . 3^4$$

$$= \frac{81}{4}$$

Örnek:

Aşağıdaki sayıların eşiti olan üslü ifadeleri yazalım.

a) 5^{-4} b) $(3^{-4})^{-5}$ c) $\dfrac{11^{23}}{11^7}$ ç) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-8} . \left(\dfrac{1}{7}\right)^4$

Çözüm

a) $5^{-4} = \dfrac{1}{5^4}$ olur.

b) $(3^{-4})^{-5} = 3^{(-4)\,.\,(-5)} = 3^{20}$ olur.

c) $\dfrac{11^{23}}{11^{7}} = 11^{23-7} = 11^{16}$ olur.

ç) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-8} . \left(\dfrac{1}{7}\right)^{4} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-8+4} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-4} = 7^4$ olur.

Örnek:

$2^a = 5$ ve $3^a = 7$ ise 72^a ifadesinin değerini bulalım. Üslü ifade olarak yazalım.

Çözüm

72 sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 = 2^3 . 3^2$

$72^a = (2^3 . 3^2)^a = (2^3)^a . (3^2)^a = \underbrace{(2^a)^3}_{5} . \underbrace{(3^a)^2}_{7} = 5^3 . 7^2$ olur.

Örnek:

$\dfrac{\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-5} . (7)^5}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^5}$ **işleminin sonucunu üslü ifade olarak yazalım.**

Çözüm

$$\dfrac{\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-5} . (7)^5}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^5} = \dfrac{\left(\dfrac{3}{7}\right)^{5} . 7^5}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^5} = \dfrac{\dfrac{3^5}{7^5} . 7^5}{\dfrac{3^5}{2^5}} = \dfrac{\cancel{3^5} . 7^{5-5}}{\cancel{3^5} . 2^{-5}} = \dfrac{7^0}{2^{-5}} = 2^5 \text{ olur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1- **Aşağıdaki üslü ifadelerin sonuçlarını bulunuz ve karşılarına yazınız.**

$17^0 =$	$\left(\frac{1}{128}\right)^{-1} =$	$\frac{5^7}{5^4} =$
$143^1 =$	$-(-3)^2 =$	$3^5 \,.\, 3^{-8} =$
$(-1)^4 =$	$\frac{1}{5^{-2}} =$	$(2^3)^{\frac{1}{3}} =$
$-1^5 =$	$2^3 \,.\, 2^2 =$	$\frac{6^3}{2^3} =$

2- **Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını üslü ifade olarak yazınız.**

$17^{14} \,.\, 2^{14} =$	$\left(\frac{1}{128}\right)^{-1} =$
$3^5 \,.\, 3^{-12} =$	$-(-3)^2 =$
$\frac{2^3}{2^{-4}} =$	$\frac{1}{5^{-2}} =$
$(2^2 \,.\, 3^4)^5 =$	$2^3 \,.\, 2^2 =$

3- **Aşağıdaki üslü ifadelerin sonuçlarını bulunuz.**

a) $\frac{100^7}{16^4 . 125}$ **b)** $\frac{88^3}{32^2 . 11^2}$

4- **$100^a = 144$ ve $2^a = 3$ ise 5^a nın değerini bulunuz.**

Ondalık Gösterimlerin Çözümlenmesi

Yandaki görselde döviz kurları verilmiştir.

Verilen sayılardaki rakamların basamak değerleri hakkında neler söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.

Örnek:

10'un tam sayı kuvvetlerinde 1'in basamak değerlerini gösterelim.

Çözüm

$10^0 = 1 \Rightarrow$ Birler Basamağı

$10^1 = 10 \Rightarrow$ Onlar Basamağı

$10^2 = 100 \Rightarrow$ Yüzler Basamağı

$10^3 = 1000 \Rightarrow$ Binler Basamağı

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1 \Rightarrow$ Onda Birler Basamağı

$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01 \Rightarrow$ Yüzde Birler Basamağı

$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001 \Rightarrow$ Binde Birler Basamağı

$10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0,0001 \Rightarrow$ On Binde Birler Basamağı

BİLGİ KUTUSU

Bir sayının ondalık gösteriminin basamak değerlerinin toplamı şeklinde yazılmasına **ondalık gösterimin çözümlenmesi** denir. Çözümlemede 10'un kuvvetleri kullanılır ve 10'un kuvvetleri sağdan sola doğru artarak devam eder.

Örnek:

432,86 sayısını çözümleyelim.

Çözüm

Çözümleme yaparken rakamı, bulunduğu basamağın basamak değeri ile çarpalım ve bu çarpımları toplayalım.

$$\begin{aligned}432,86 &= 432 + 0,86\\ &= 400 + 30 + 2 + 0,8 + 0,06\\ &= 4 \,.\, 100 + 3 \,.\, 10 + 2 \,.\, 1 + 8 \,.\, 0,1 + 6 \,.\, 0,01\\ &= \underbrace{4 \,.\, 10^2}_{\text{Yüzler Basamağı}} + \underbrace{3 \,.\, 10^1}_{\text{Onlar Basamağı}} + \underbrace{2 \,.\, 10^0}_{\text{Birler Basamağı}} + \underbrace{8 \,.\, 10^{-1}}_{\text{Onda Birler Basamağı}} + \underbrace{6 \,.\, 10^{-2}}_{\text{Yüzde Birler Basamağı}}\end{aligned}$$

Örnek:

108,053 sayısını çözümleyelim.

Çözüm

TAM KISIM				KESİR KISMI		
Yüzler Basamağı	Onlar Basamağı	Binler Basamağı		Onda Birler Basamağı	Yüzde Birler Basamağı	Binde Birler Basamağı
1	0	8	,	0	5	3

$$\begin{aligned}108,053 &= 1 \,.\, 100 + 0 \,.\, 10 + 8 \,.\, 1 + 0 \,.\, 0,1 + 5 \,.\, 0,01 + 3 \,.\, 0,001\\ &= 1 \,.\, 10^2 + 0 \,.\, 10^1 + 8 \,.\, 10^0 + 0 \,.\, 10^{-1} + 5 \,.\, 10^{-2} + 3 \,.\, 10^{-3}\end{aligned}$$

Örnek:

$2 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^1 + 4 \,.\, 10^0 + 9 \,.\, 10^{-1} + 8 \,.\, 10^{-2}$ sayısının ondalık gösterimini yazalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}2 \,.\, 100 + 5 \,.\, 10 + 4 \,.\, 1 + 9 \,.\, 0,1 + 8 \,.\, 0,01 &= 200 + 50 + 4 + 0,9 + 0,08\\ &= 254,98\end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıda verilen sayıların 10'un kuvvetlerini kullanarak çözümleyiniz.

a) 20,107 = ...

b) 0,379 = ...

c) 45,023 = ...

d) 980,504 = ...

2- Aşağıdaki çözümlenmiş sayıların ondalık gösterimlerini yazınız.

a) $2.10^{2} + 5.10^{0} + 4.10^{-1} + 1.10^{-2}$ = ...

b) $3.10^{1} + 4.10^{0} + 8.10^{-2}$ = ...

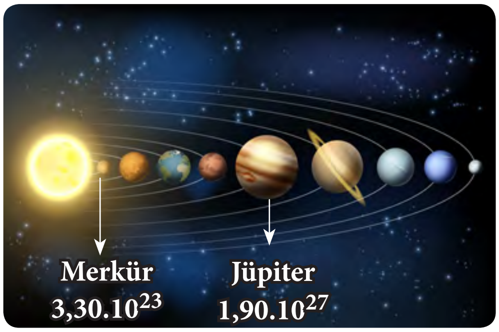
c) $9.10^{0} + 2.10^{-1} + 3.10^{-2} + 8.10^{-3}$ = ...

d) $0.10^{0} + 5.10^{-2}$ = ...

3- 43,01 sayısının çözümlenmiş hâli $43,01 = 4 . 10^{a} + 3 . 10^{b} + 1 . 10^{c}$ ise a+b+c kaçtır?

Çok Büyük ve Çok Küçük Sayılar

Güneş sisteminin en büyük gezegeni Jüpiter ile en küçük gezegeni Merkür'ün kütlesi görselde verildiği gibidir. Sizce gezegenlerin kütlesini farklı şekilde yazabilir miyiz? Düşününüz.



Örnek:

Kimyasal ve fiziksel hesaplamalarda kullandığımız bir elementin bir molündeki atom sayısına avogadro sayısı denir. Avogadro sayısı yaklaşık olarak $6{,}02.10^{23}$ şeklinde yazılır. Bu sayıyı 10'un kuvvetleri şeklinde ifade edelim.

Çözüm

$$6{,}02.10^{23} = 6{,}02 \, . \, \underbrace{1.000 \ldots 0}_{23 \text{ tane}} = 602 \, \underbrace{000 \ldots 0}_{21 \text{ tane}}$$

Verilen sayıdaki virgülü sağa doğru iki basamak hareket ettirdiğimiz için sayımızda 10'un kuvveti (üssü) iki basamak azalmıştır.

$6{,}02.10^{23} = 602 \, . \, 10^{21} = 60{,}2 \, . \, 10^{22}$ şeklinde yazabiliriz.

Örnek:

$4{,}3 \, . \, 10^4$ sayısını 10'un farklı tam sayı kuvvetlerini kullanarak çözümleyelim.

Çözüm

$4{,}3 \, . \, 10^4 = 4{,}3 \, . \, 10000 = 43\,000$ sayısını 10'un kuvveti olarak yazalım.

$43\,000 = 43 \, . \, 10^3 = 4{,}3 \, . \, 10^4 = 0{,}43 \, . \, 10^5$ olur. Sayımızdaki virgülü sola doğru bir basamak hareket ettirdiğimiz için sayımızda 10'un kuvveti (üssü) bir basamak artmıştır.

Örnek:

$0,0000000\,74 = 7,4 \,.\, 10^{a}$ eşitliğindeki a'yı bulalım.

Çözüm

$0,0000000\,74 = 74 \,.\, 10^{-9} = 7,4 \,.\, 10^{-8}$ olur.

$a = -8$ bulunur.

BİLGİ KUTUSU

Verilen bir sayı 10'un farklı tam sayı kuvvetleriyle ifade ederken virgülün sağa doğru hareket ettiği basamak sayısı kadar 10'un kuvveti (üssü) azalır. Virgülün sola doğru hareket ettiği basamak sayısı kadar 10'un kuvveti (üssü) artar.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıdaki tabloyu 10'un farklı tam sayı kuvvetlerini kullanarak doldurunuz.

2400000	$24 \,.\, 10^{\cdots}$	$0,24 \,.\, 10^{\cdots}$
0,00000165	$1,65 \,.\, 10^{\cdots}$	$165 \,.\, 10^{\cdots}$
$3,45 \,.\, 10^{4}$	$0,0345 \,.\, 10^{\cdots}$	$345 \,.\, 10^{\cdots}$

2- $0,00000185 \,.\, 10^{25} = 18,5 \,.\, 10^{a}$ eşitliğinde a sayısı kaçtır?

Çok Büyük ve Çok Küçük Sayıların Bilimsel Gösterimi

Dünyanın etrafında koruyucu kalkan olarak bulunan ozon tabakası, öldürücü radyasyon etkisine karşı tüm canlıları korur. Aynı zamanda iklimleri etkileyen ozon tabakasının ağırlığı 3290000000 ton olarak belirlenmiştir. Bu sayıyı bilimsel gösterimle nasıl ifade edebileceğinizi düşününüz.

Örnek:

Aşağıdaki sayıları, 1 ile 10 arasında bir sayı ve 10'un kuvveti olan bir sayının çarpımı şeklinde yazalım.

a) 145000 000 000

b) 0,00000000 7824

Çözüm

a) $1 \leq 1,45 < 10$ olacak şekilde tam kısım oluşturup 10'un kuvveti ile çarptığımızda bilimsel gösterimi:

$1,45000000000 = 1,45 \times 10^{11}$ olur.

11 basamak sola

b) $1 \leq 7,824 < 10$ olacak şekilde tam kısım oluşturup 10 un kuvveti ile çarptığımızda bilimsel gösterimi:

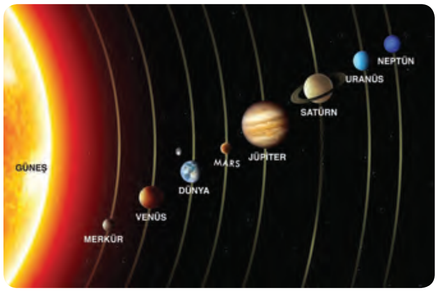
$0,000000007,824 = 7,824 \times 10^{9}$ olur.

9 basamak sağa

BİLGİ KUTUSU

|a|, 1 veya 1'den büyük, 10'dan küçük bir gerçek sayı ve n bir tam sayı olmak üzere $a \times 10^{n}$ gösterimine **bilimsel gösterim** denir.

Örnek:



Güneş sistemindeki bazı gezegenlerin Dünya'ya olan ortalama uzaklıkları aşağıda verilmiştir.

Merkür : 77 300 000 km

Venüs : 38 200 000 km

Jüpiter : 588 000 000

Bu uzaklıkların bilimsel gösterimlerini yazalım.

Çözüm

Yukarıdaki sayıların tam kısmını 1 ve 1'den büyük 10'dan küçük olacak şekilde oluşturup 10'un kuvveti ile çarpalım. Çarparak bilimsel gösterimlerini yazalım.

$1 \leq 7{,}73 < 10 \quad \Rightarrow \quad 7,73 \text{ x } 10^7$ km

$1 \leq 3{,}82 < 10 \quad \Rightarrow \quad 3,82 \text{ x } 10^7$ km

$1 \leq 5{,}88 < 10 \quad \Rightarrow \quad 5,88 \text{ x } 10^8$ km

Örnek:

Bilimsel gösterimleri $8{,}012 \text{ x } 10^{-17}$ ve $8{,}102 \text{ x } 10^{-17}$ olan sayıları karşılaştırarak sıralayalım.

Çözüm

Verilen sayılarda tam kısımlar ve 10'un kuvvetleri eşittir. Ondalık kısımlarını karşılaştırınız.

$8{,}102 > 8{,}012$ olduğundan $8{,}102 \text{ x } 10^{-17} > 8{,}012 \text{ x } 10^{-17}$ olur.

Örnek:

Bilimsel gösterimleri $4{,}25 \text{ x } 10^{-25}$ ile $5{,}84 \text{ x } 10^{-24}$ olan sayıları, karşılaştırak sıralayalım.

Çözüm

Verilen sayılarda 10'un kuvvetlerini eşitleyelim.

$5{,}84 \text{ x } 10^{-24} = 58{,}4 \text{ x } 10^{-25} > 4{,}25 \text{ x } 10^{-25}$ olur.

$58{,}4 > 4{,}25$ olduğundan $58{,}4 \text{ x } 10^{-25} > 4{,}25 \text{ x } 10^{-25}$

$5{,}84 \text{ x } 10^{-24} > 4{,}25 \text{ x } 10^{-25}$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıdakilerden hangisi bilimsel gösterime örnektir?

A) $0,05 . 10^{21}$ B) $10,5 . 10^{15}$ C) $8,3 . 10^{18}$ D) $12,5 . 10^{45}$

2- Aşağıdaki sayıların bilimsel gösterimlerini bulunuz.

Sayılar	Bilimsel Gösterimi
28100000000	
0,00000005	
$43,5 . 10^{8}$	
$0,0014 . 10^{-12}$	

3- Bilimsel gösterimleri verilen sayıları karşılaştırarak sıralayınız.

a) $18,5 . 10^{8}$ ile $1,8 . 10^{9}$

b) $0,24 . 10^{-12}$ ile $0,02 . 10^{-14}$

c) $204 , 2 . 10^{20}$ ile $2,002 . 10^{22}$

d) $9,5 . 10^{-18}$ ile $8,6 . 10^{-18}$

4- Dünya güneş etrafında yaklaşık 106000 km/saat hızla hareket etmektedir.

Dünya'nın Güneş etrafındaki hızının bilimsel gösterimini yazınız.

ÖZET

- Pozitif bir tam sayı, farklı pozitif tam sayıların çarpımı şeklinde yazılır. Bu tam sayıların her birine o sayının çarpanı denir. Bu çarpanlar aynı zamanda o sayının bölenleri dir.
- 1 ve kendisinden başka çarpanı olmayan 1'den büyük doğal sayılara asal sayı denir.
- Bir pozitif tam sayıyı asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazmaya asal çarpanlara ayırma denir.
- İki ya da daha fazla doğal sayının ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların en büyük ortak böleni (EBOB) denir.
- İki ya da daha fazla doğal sayının ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların en küçük otak katı (EKOK) denir.
- İki doğal sayının 1'den başka ortak böleni yoksa bu sayılara aralarında asal sayılar denir. Aralarında asal sayıların EBOB'u 1 e, EKOK'u ise bu ki sayının çarpımına eşittir.
- Ardışık doğal sayılar aralarında asaldır.
- Ardışık tek doğal sayılar aralarında asaldır.
- 1 ile tüm doğal sayılar aralarında asaldır.
- Sıfırdan farklı bir tam sayının kendisiyle tekrarlı çarpımının gösterimine üslü ifade denir.
- a sıfırdan farklı bir tam sayı olmak üzere $a^0 = 1$ dir. $a \in Z^+$ olmak üzere, n çift sayı ise

  $(-a)^n = a^n$, n tek sayı ise $(-a)^n = -a^n$, $-(a)^n = -a^n$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ dir.
- Tabanları eşit olan üslü ifadelerin çarpımında $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ olur.

  Sıfırdan farklı a, b tam sayıları için $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$ dir.
- Tabanları eşit olan üslü ifadelerdeki bölme işleminde $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$ dır.

  Tabanları farklı ve üsleri aynı olan üslü ifadelerdeki çarpma işleminde $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ olur.

  Tabanları farklı ve üsleri aynı olan üslü ifadelerin bölme işleminde $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, $(b \neq 0)$ olur.

  Üslü ifadelerin kuvveti alınırken üsler çarpılır.

  $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y}$
- Bir sayının ondalık gösteriminin basamak değerlerinin toplamı şeklinde yazılmasına ondalık gösterimin çözümlenmesi denir.
- lal, 1 veya 2 den büyük, 10 dan küçük bir gerçek sayı ve n, bir tam sayı olmak üzer $a \times 10^n$ gösterimine bilimsel gösterim denir.

1.ÜNİTE
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. **Aşağıdakilerden hangisi 90 sayısının çarpanlarından biri değildir?**

A) 6 B) 15

C) 21 D) 30

2. **Aşağıdakilerden hangisi 240 sayısının pozitif tam sayı çarpanlarının üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazılışıdır?**

A) $2^4 . 3 . 5$ B) $2^3 . 3^2 . 5$

C) $2 . 3 . 5^2$ D) $2 . 3^2 . 5^2$

HAYAT BOYU ÖĞRENME

3. **Aşağıda verilen ifadelerden hangisi doğrudur?**

A) 1 ve kendisinden başka çarpanı olmayan 1'den büyük doğal sayılara asal sayı denir.

B) Aralarında asal sayıların en küçük ortak böleni 2'dir.

C) Bir doğal sayının asal çarpanlarının çarpımı her zaman o sayıya eşittir.

D) Ardışık doğal sayılar aralarında asal değildir.

4. İşyeri sahibi marketten aldığı 18 tane çay poşeti ile 24 tane temizlik malzemesini birbirine karıştırmadan ve artmayacak şekilde kolilere eşit sayıda yerleştiriyor.

Buna göre bu iş için en az kaç tane koli gereklidir?

A) 3 B) 4

C) 6 D) 7

5. İki çalar saat sırasıyla 30 dakika ve 45 dakikada bir çalıyor.

İkisi birlikte ilk kez saat 09.30'da çaldıktan sonra ikinci kez birlikte saat kaçta çalar?

A) 10.30 B) 11.00

C) 11.45 D) 12.00

6. $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$

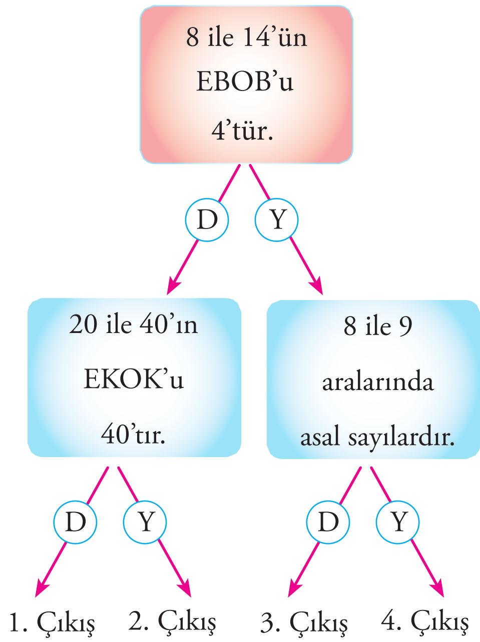
İşleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8^5 B) 8^{-5}

C) $5 \cdot 8^{-1}$ D) $5 \cdot 8^{-5}$

HAYAT BOYU ÖĞRENME

7.



Bilgilerin doğru veya yanlış oluşuna göre okları takip ettiğinizde hangi çıkışa ulaşırsınız?

A) 1. Çıkış B) 2. Çıkış

C) 3. Çıkış D) 4. Çıkış

8. 5^{18} adet kalem 25 kişilik bir sınıfa dağıtılacaktır.

Buna göre bir kişiye düşen kalem sayısı kaçtır?

A) 5^7 B) 5^9

C) 5^{12} D) 5^{16}

9. Aşağıdaki üslü ifadelere karşılık gelen değerler verilmiştir.

Hangi seçenekte kutu içerisindeki sayı <u>yanlıştır</u>?

A) $(5^2)^{-4} = \dfrac{1}{5^{\boxed{8}}}$

B) $7^5 \cdot 3^5 = \boxed{21}^5$

C) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\boxed{\dfrac{4}{3}}\right)^2$

D) $3^4 \, . \, 3^{-8} = 3^{\boxed{-4}}$

10. $12^0 \cdot (-1)^{23} + 8^1$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7
B) 8
C) 12
D) 20

11. Aşağıdaki sayıların 10'un kuvvetleri cinsinden çözümlemesi hangi seçenekte doğru verilmiştir?

A) $43,43 = 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$

B) $820,1 = 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^{-1}$

C) $0,79 = 7 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$

D) $6,01 = 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^{-1}$

HAYAT BOYU ÖĞRENME

12. 0,00000801 sayısının bilimsel gösterimi $a \, . \, 10^b$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) a bir doğal sayıdır

B) $b < 0$

C) $a < b$

D) $a = b$

13. Yeryüzünü saran atmosferin kalınlığı yerden itibaren 56 000 000 cm ye kadar uzanır.

Atmosferin kalınlığının bilimsel gösterimle ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $560 \, . \, 10^5$
B) $56 \, . \, 10^6$
C) $0,56 \, . \, 10^8$
D) $5,6 \, . \, 10^7$

2. ÜNİTE
KAREKÖKLÜ İFADELER VE VERİ ANALİZİ

ÜNİTE KONULARI

► KAREKÖKLÜ İFADELER

► VERİ ANALİZİ

2. ÜNİTE

• KAREKÖKLÜ İFADELER
• VERİ ANALİZİ

NELER ÖĞRENECEĞİZ ?

Bu ünitenin birinci bölümününde;

- Tam kare pozitif tam sayıların karekökünü almayı,
- Tam kare olmayan kareköklü sayıların hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirlemeyi,
- Kareköklü bir ifadeyi $a\sqrt{b}$ şeklinde yazmayı $a\sqrt{b}$ şeklindeki ifadede katsayıyı kök içine almayı,
- Kareköklü ifadelerle çarpma ve bölme işlemleri yapmayı,
- Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemleri yapmayı,
- Kareköklü bir ifade ile çarpıldığında, sonucu bir doğal sayı yapan çarpanları bulmayı,
- Ondalık ifadelerin kareköklerini belirlemeyi,
- Rasyonel ve irrasyonel sayıları gerçek sayılar ile ilişkilendirmeyi öğreneceğiz.

Bu ünitenin ikinci bölümününde;

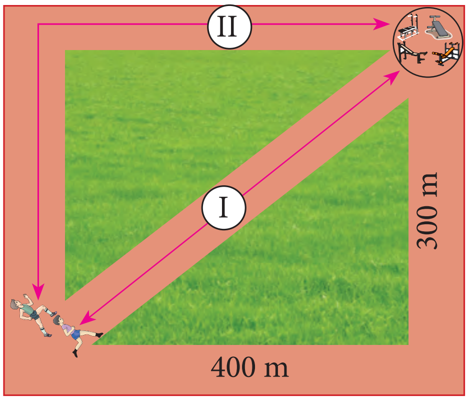
- Çizgi ve sütun grafiklerini yorumlamayı,
- Verilen sütun, daire veya çizgi grafiği ile göstermeyi ve bu gösterimler arasında uygun dönüşümleri yapmayı öğreneceğiz.

ANAHTAR KAVRAMLAR

- Tam kare pozitif tam sayılar
- Gerçek sayı
- Karekök
- İrrasyonel sayı

KAREKÖKLÜ İFADELER

Dikdörtgen şeklindeki parkta iki arkadaştan biri spor aletlerine ulaşmak için I no.lu yolu, diğeri II no.lu yolu tercih ediyor. Sizce hangi yol daha kısadır? Yolların uzunluğu hesaplamak için hangi yöntemleri kullanabilirsiniz? Düşününüz.



Örnek:

16, 36, 100, 150 sayılarından hangilerinin tam kare pozitif sayılar olduğunu bulalım.

Çözüm

Sayıları asal çarpanlarına ayıralım.

16	2	36	2	100	2	150	2
8	2	18	2	50	2	75	3
4	2	9	3	25	5	25	5
2	2	3	3	5	5	5	5
1		1		1		1	

$16 = 2^4$ $36 = 2^2 . 3^2$ $100 = 2^2 . 5^2$ $150 = 2 . 3 . 5^2$

16, 36 ve 100'ü asal çarpanlarına ayırdığımızda tüm asal çarpanların kuvvetlerinin çift sayı olduğunu görürüz.

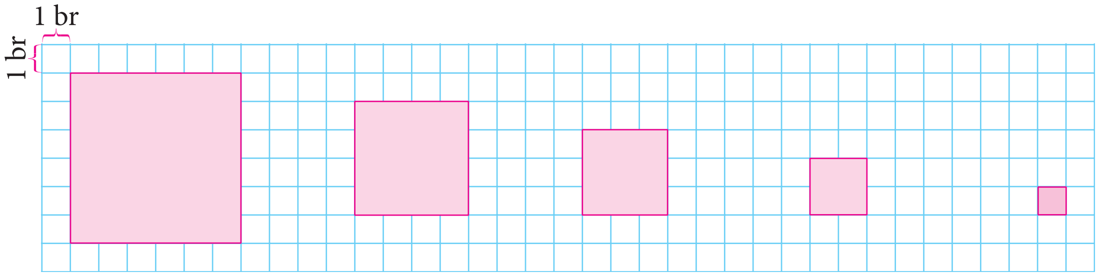
16, 36 ve 100 sayıları tam karedir.

150'nin tüm asal çarpanlarının kuvvetleri çift sayı olmadığından tam kare değildir.

BİLGİ KUTUSU

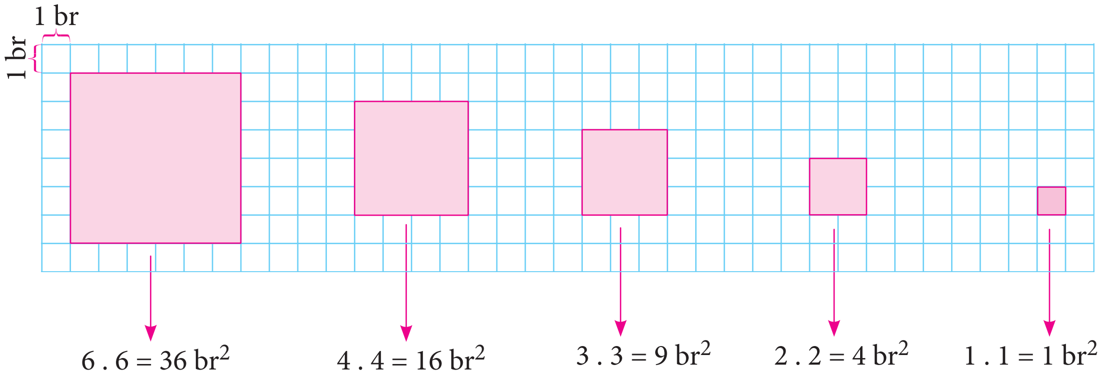
Bir tam sayının karesi olan sayılara **tam kare pozitif tam sayılar** denir. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, …… gibi sayılar tam kare pozitif tam sayılardır.

Örnek:



Yukarıda verilen kareli zemin üzerindeki boyalı alanların kaç birim kare olduğunu bulalım.

Çözüm



Örnek:

Alanları 9 ve 36 m^2 olan karelerin bir kenar uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Karenin alanı: Bir kenar uzunluğunun karesidir. 9 ve 36'nın hangi pozitif tam sayının karesi olduğunu bulalım.

$9 = 3 \,.\, 3 = (-3) \,.\, (-3) = (-3)^2$ (3 ve –3'ün karesi 9'dur.)

$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ (9'un karekökü 3'tür.)

Alanı 9 olan karenin bir kenar uzunluğu 3 m olur.

$36 = 6 \,.\, 6 = (-6) \,.\, (-6) = 6^2 = (-6)^2$ (6 ve –6'nın karesi 36'dır.)

$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$ (36'nın karekökü 6'dır.)

Alanı 36 olan karenin bir kenar uzunluğu 6 m olur.

BİLGİ KUTUSU

Bir pozitif tam sayının hangi pozitif tam sayının karesi olduğunu bulma işlemine **karekök alma** denir. Karekök " $\sqrt{}$ " sembolü ile gösterilir.

Örnek:

169, 225 ve 400 sayılarının kareköklerini bulalım.

Çözüm

Verilen sayıları asal çarpanlara ayıralım.

169	13
13	13
1	

169 = 13 . 13

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$225 = 3 . 3 . 5 . 5$
$= 3^2 . 5^2$
$= (3 . 5)^2$
$= 15^2$

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$400 = 2 . 2 . 2 . 2 . 5 . 5$
$= 2^2 . 2^2 . 5^2$
$= (2 . 2 . 5)^2$
$= 20^2$

$\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$
$\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$
$\sqrt{400} = \sqrt{20^2} = 20$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1- 32, 48, 64, 121 ve 160 **sayılarının tam kare pozitif sayılar olup olmadığını inceleyiniz.**

2- **Aşağıda verilen üslü ifadelerin eşitini karşılarına yazınız.**

2^2 = ... 5^2 = ... 8^2 = ...

9^2 = ... 11^2 = ... 13^2 = ...

14^2 = ... 20^2 = ... 25^2 = ...

3- **Aşağıda verilen kareköklü ifadelerin pozitif tam sayı eşitini karşılarına yazınız.**

$\sqrt{1}$ = ... $\sqrt{4}$ = ... $\sqrt{9}$ = ...

$\sqrt{16}$ = ... $\sqrt{36}$ = ... $\sqrt{49}$ = ...

$\sqrt{100}$ = ... $\sqrt{144}$ = ... $\sqrt{256}$ = ...

Tam Kare Olmayan Kareköklü Bir Sayının Hangi İki Doğal Sayı Arasında Olduğunu Belirleme

Ahmet arkadaşı İpek'e yaşını sorduğunda aldığı cevap "$\sqrt{150}$"ye en yakın tam sayı olmuştur. Buna göre İpek'in yaşının kaç olabileceğini düşününüz.

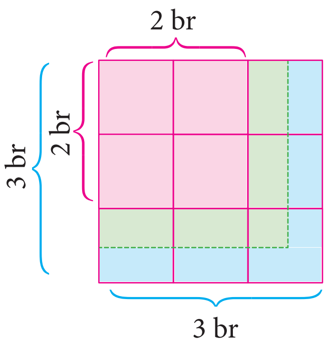
Örnek:

$\sqrt{8}$ sayısının hangi ardışık iki doğalsayı arasında olduğunu belirleyelim.

Çözüm

8'den küçük olan en büyük karenin alanı 4'tür.

8'den büyük olan en küçük karenin alanı 9'dur.



Kırmızı boyalı alan : $2^2 = 4\ br^2$

Kırmızı ve yeşil alanların toplamı : $8\ br^2$

Kırmızı, yeşil ve mavi alanların toplamı : $3^2 = 9\ br^2$

$$4 < 8 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$$

$2 < \sqrt{8} < 3$ olduğundan

$\sqrt{8}$ sayısı 2 ve 3 ardışık doğal sayıları arasındadır.

BİLGİ KUTUSU

Tam kare olmayan kareköklü sayıların hangi ardışık iki doğal sayı arasında olduğunu bulmak için, karekökün içindeki sayıdan önceki ve sonraki tam kare sayılar belirlenir.

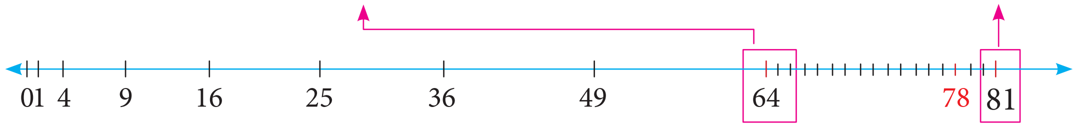
Örnek:

$\sqrt{78}$'in hangi ardışık doğal sayılar arasında olduğunu bulalım.

Çözüm

78' den küçük en büyük tam kare sayısı 64' tür.

78' den büyük en küçük tam kare sayısı 81' dir.



$$64 < 78 < 81 \xrightarrow{\text{karekökleri}} \sqrt{64} < \sqrt{78} < \sqrt{81}$$

$$8 < \sqrt{78} < 9$$

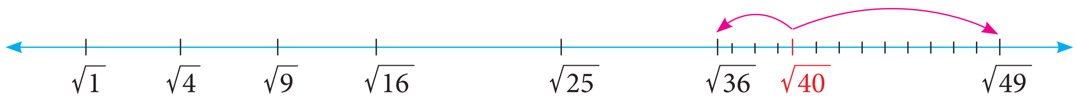
$\sqrt{78}$ sayısı 8 ve 9 sayıları arasındadır.

Sayı doğrusunda da görüldüğü gibi 78 ile 64 arasında 13 sayı, 18 ile 81 arasında 2 sayı vardır. $\sqrt{78}$ sayısı $\sqrt{81}$'e yani 9'a daha yakındır.

Örnek:

$\sqrt{40}$ sayısı hangi doğal sayıya daha yakındır? Bulalım.

Çözüm



Sayı doğrusunda da görüldüğü gibi $\sqrt{40}$ sayısı $\sqrt{36} = 6$'ya daha yakındır.

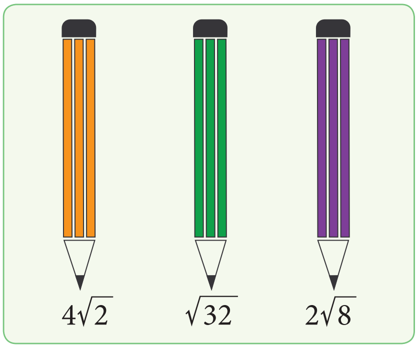
ALIŞTIRMA

1- **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri uygun ifadeler ile doldurunuz**

Sayı	Hangi Ardışık Doğal Sayılar Arasındadır?	Hangi Doğal Sayıya Daha Yakındır?
$\sqrt{35}$		
$\sqrt{42}$		
$\sqrt{74}$		
$\sqrt{97}$		
$\sqrt{115}$		
$\sqrt{234}$		

Kareköklü Bir İfadeyi $a\sqrt{b}$ Şeklinde Yazma ve $a\sqrt{b}$ Şeklindeki İfadede Katsayıyı Kök İçine Alma

Uzunlukları $4\sqrt{2}$, $\sqrt{32}$ ve $2\sqrt{8}$ cm olan kalemleri büyükten küçüğe doğru nasıl sıralarsınız? Düşününüz.



Örnek:

$\sqrt{72}$ sayısının $a\sqrt{b}$ biçimindeki farklı yazılışlarını bulalım.

Çözüm

72'yi asal çarpanlarına ayıralım.

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 = 2^3 \,.\, 3^2$

- $2^3 \,.\, 3^2$ ifadesindeki 3^2 tam kare olduğundan kök dışına çıkarılır.

  $\sqrt{72} = \sqrt{2^3 . 3^2} = 3\sqrt{2^3} = 3\sqrt{8}$ olur.

- $2^3 \,.\, 3^2$ ifadesini $2 \,.\, 2^2 \,.\, 3^2$ şeklinde yazarsak 2^2 ve 3^2 sayıları tam kare olduğundan kök dışına çıkarılır. Buna göre

  $\sqrt{72} = \sqrt{2 . 2^2 . 3^2} = 2 . 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ olur.

- $2^3 \,.\, 3^2$ ifadesini $2 \,.\, 2^2 \,.\, 3^2$ şeklinde yazabiliriz. 2^2 tam kare olduğundan kök dışına çıkarılır. Buna göre

  $\sqrt{72} = \sqrt{2 . 2^2 . 3^2} = 2 . \sqrt{2 . 3^2} = 2\sqrt{18}$ olur.

- 72 sayısını 1^2 ile çarptığımızda değeri değişmez.

  $1^2 \,.\, 72$ ifadesinde 1^2 tam kare olduğundan kök dışına çıkarılır.

  $\sqrt{72} = \sqrt{1^2 . 72} = 1\sqrt{72} = \sqrt{72}$ olur.

BİLGİ KUTUSU

Karekök içindeki bir sayı, asal çarpanlarına ayrıldıktan sonra içindeki tam kare çarpanların karekökleri alınır ve karekök sembolünün başına kat sayı olarak yazılır. Diğer çarpanlar ise karekök içinde kalır.

$$\sqrt{a^2 . b} = a\sqrt{b}$$
$$\sqrt{a^2 . b^2 . c} = a . b\sqrt{c}$$

Örnek:

$\sqrt{120}$ sayısının $a\sqrt{b}$ şeklinde yazalım.

Çözüm

120 sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$\sqrt{120} = \sqrt{2.2.2.3.5} = \sqrt{2^2.2.3.5} = 2\sqrt{30}$

$\sqrt{120} = 2\sqrt{30}$ olur.

Örnek:

$\sqrt{80}$ sayısının $a\sqrt{b}$ biçimindeki farklı yazılışlarını bulalım.

Çözüm

80 sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$\sqrt{80} = \sqrt{1 .1 .2 .2 .2 . 2. 5} = 1\sqrt{80}$

$\sqrt{80} = \sqrt{2.2.2.2.5} = 2\sqrt{20}$

$\sqrt{80} = \sqrt{2.2.2.2 .5} = 4\sqrt{5}$ şeklinde yazılır.

Örnek:

$3\sqrt{5}$ ifadesinde kat sayıyı karekök içinde yazalım.

Çözüm

$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 . 5} = \sqrt{9 . 5} = \sqrt{45}$ olur.

Karekök önündeki katsayı, karekök içine karesi alınarak yazılır.

Karekök içindeki sayılar çarpılır.

Örnek:

Aşağıdaki kareköklü sayıların katsayılarını kakekök içine alalım.

a) $5\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{8}$

Çözüm

a) $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 . 2} = \sqrt{25 . 2} = \sqrt{50}$

b) $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 . 3} = \sqrt{16 . 3} = \sqrt{48}$

c) $5\sqrt{8} = \sqrt{5^2 . 8} = \sqrt{25 . 8} = \sqrt{200}$

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıdaki kareköklü ifadeleri $a\sqrt{b}$ şeklinde yazınız.

$\sqrt{18}$	
$\sqrt{50}$	
$\sqrt{320}$	
$\sqrt{450}$	

2- **Aşağıdaki kareköklü ifadeleri $a\sqrt{b}$ şeklinde yazınız.**

$\sqrt{5^2 . 3}$	
$\sqrt{2 . 7^2}$	
$\sqrt{8^2 . 3}$	
$\sqrt{11^2 . 2}$	

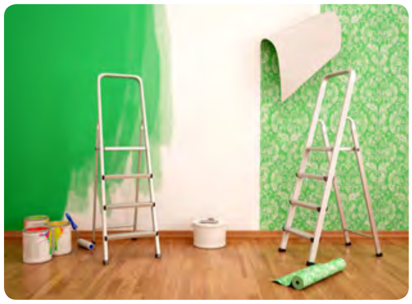
3- $\sqrt{2^3 . 3^3 . 5^2}$ **sayısının $a\sqrt{b}$ biçimindeki yazılışında a'nın alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?**

4- **Aşağıdaki kareköklü ifadeleri $\sqrt{a}$ şeklinde yazınız.**

$3\sqrt{5}$	
$4\sqrt{7}$	
$6\sqrt{11}$	
$5\sqrt{4}$	

Kareköklü İfadelerde Çarpma ve Bölme İşlemleri

Dikdörtgen şeklindeki bir duvar, duvar kâğıdı ile kaplanacaktır. Duvarın boyutları $5\sqrt{2}$ m ve $2\sqrt{3}$ m olduğuna göre bu iş için kaç m^2 duvar kâgıdına ihtiyaç olduğunu düşününüz.



Örnek:

$\sqrt{18}$. $\sqrt{2}$ işlemin sonucunu bulalım.

Çözüm

Karekök içindeki 18 ve 2 yi çarpalım. Bulduğumuz sonucu karekök içerisine yazalım.

$18 \,.\, 2 = 36$

$\sqrt{18} \,.\, \sqrt{2} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$ olur.

Örnek:

Aşağıdaki çarpma işlemlerinin sonuçlarını bulalım.

a) $3\sqrt{5} \,.\, 4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} \,.\, \sqrt{7}$ c) $2\sqrt{10} \,.\, 3\sqrt{3}$

Çözüm

Karekök önündeki katsayıları kendi arasında, içindeki sayıları kendi arasında çarpalım.

a) $3\sqrt{5} \,.\, 4\sqrt{2} = 3 \,.\, 4\sqrt{5 \,.\, 2} = 12\sqrt{10}$

b) $\sqrt{3} \,.\, \sqrt{7} = \sqrt{3 \,.\, 7} = \sqrt{21}$

c) $2\sqrt{10} \,.\, 3\sqrt{3} = 2 \,.\, 3\sqrt{10 \,.\, 3} = 6\sqrt{30}$ olur.

BİLGİ KUTUSU

Kareköklü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken karekök önündeki katsayılar kendi arasında çarpılıp katsayı olarak yazılır. Karekök içindeki sayılar ise kendi arasında çarpılıp karekök içine yazılır.

$$a\sqrt{b} \,.\, c\sqrt{d} = a \,.\, c\sqrt{b \,.\, d}$$

Örnek:

Aşağıdaki çarpma işlemlerinin sonucunu bulalım.

a) $10\sqrt{10}\,.\,\sqrt{10}$ b) $3\sqrt{15}\,.\,2\sqrt{6}$ c) $5\sqrt{2}\,.\,3\sqrt{8}\,.\,\sqrt{3}$

Çözüm

a) $\sqrt{10}\,.\,\sqrt{10} = \sqrt{10\,.\,10} = \sqrt{10^2} = 10$

Karekökün içindeki sayılar aynı iki kareköklü sayının çarpımında karekök ortadan kalkar ve sonuç sayının kendisi olur.

b) $3\sqrt{15}\,.\,2\sqrt{6} = 3\,.\,2\sqrt{15\,.\,6} = 6\sqrt{\underbrace{3\,.\,5\,.\,2\,.\,3}_{9}} = 6\sqrt{9\,.\,2\,.\,5} = 6\sqrt{3^2\,.\,2\,.\,5} = 6\,.\,3\sqrt{2\,.\,5}$

$= 18\sqrt{10}$

c) $5\sqrt{2}\,.\,3\sqrt{8}\,.\,\sqrt{3} = 5\,.\,3\sqrt{2\,.\,8\,.\,3} = 15\sqrt{16\,.\,3} = 15\sqrt{4^2\,.\,3} = 15\,.\,4\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$

Çarpma yaptıktan sonra karekök içinde bulduğumuz tam kare sayıları karekökün dışına çıkarırız.

BİLGİ KUTUSU

$\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$ olur.

Örnek:

Aşağıdaki bölme işlemlerini yapalım.

a) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{4\sqrt{88}}{2\sqrt{11}}$ c) $\dfrac{9\sqrt{30}}{3\sqrt{6}}$

Çözüm

Karekök önündeki katsayıları kendi arasında, içindeki sayıları kendi arasında bölelim.

a) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{15}{5}} = \sqrt{3}$

b) $\dfrac{4\sqrt{88}}{2\sqrt{11}} = \dfrac{4}{2}\sqrt{\dfrac{88}{11}} = 2\underbrace{\sqrt{8}}_{4\,.\,2} = 2\,.\,2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

c) $\dfrac{9\sqrt{30}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{9}{3}\sqrt{\dfrac{30}{6}} = 3\sqrt{5}$

BİLGİ KUTUSU

Kareköklü ifadelerde bölme işlemi yapılırken karekök önündeki katsayılar kendi arasında bölünüp katsayı olarak yazılır. Karekök içindeki sayılar ise kendi arasında bölünüp karekök içine yazılır.

$$\frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}$$

Örnek:

Aşağıdaki bölme işlemlerini yapalım.

a) $\sqrt{12} \div \sqrt{3}$

b) $32\sqrt{10} \div 4\sqrt{5}$

c) $5\sqrt{2} \div 2\sqrt{3}$

Çözüm

a) $\sqrt{12} \div \sqrt{3} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

b) $32\sqrt{10} \div 4\sqrt{5} = \dfrac{32}{4}\sqrt{\dfrac{10}{5}} = 8\sqrt{2}$

c) $5\sqrt{2} \div 2\sqrt{3} = \dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Örnek:

Alanı $16\sqrt{60}\ cm^2$ olan dikdörtgen şeklindeki bir masanın kısa kenar uzunluğu $4\sqrt{6}$ cm'dir. Uzun kenar uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Dikdörtgenin alanı, kısa kenar ile uzun kenar uzunluklarının çarpımıdır.

Uzun kenar = x olsun.

$$16\sqrt{60} = 4\sqrt{6} \cdot x \Rightarrow x = \frac{16\sqrt{60}}{4\sqrt{6}} = \frac{16}{4}\sqrt{\frac{60}{6}} = 4\sqrt{10} \text{ cm olur.}$$

Örnek:

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{18}}$ b) $\dfrac{3\sqrt{14}\,.\sqrt{5}}{\sqrt{6}\,.\,6\sqrt{21}}$ c) $\dfrac{6\sqrt{30}}{8\sqrt{45}\,.\sqrt{2}}$

Çözüm

Kareköklü ifadelerde bölme işlemi yapılırken karekök içindeki sayılar kendi aralarında sadeleştirilir.

a) $\dfrac{\sqrt{\cancel{32}^{16}}}{\sqrt{\cancel{18}^{9}}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{4}{3}$

b) $\dfrac{\cancel{3}^{1}\sqrt{\cancel{14}^{2}}\,.\sqrt{5}}{\sqrt{6}\,.\,\cancel{6}^{2}\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{\cancel{2}^{1}}\,.\sqrt{5}}{\sqrt{\cancel{6}^{3}}\,.\,2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}\,.\,2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\,.\,3} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$

c) $\dfrac{\cancel{6}^{3}\sqrt{\cancel{30}^{2}}}{{}^{4}\cancel{8}\sqrt{\cancel{45}^{3}}\,.\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{\cancel{2}^{1}}}{4\sqrt{3}\,.\sqrt{\cancel{2}^{1}}} = \dfrac{3}{4\sqrt{3}}$

ALIŞTIRMALAR

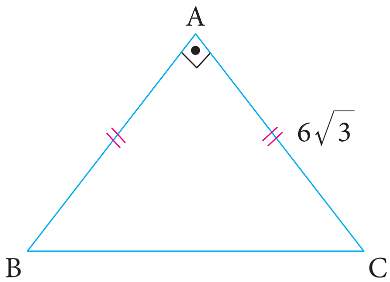
1- **Aşağıdaki işlemleri yapınız.**

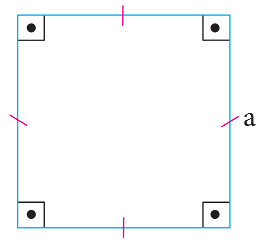
$\sqrt{5}\,.\,4\sqrt{7}$	
$3\sqrt{12}\,.\,2\sqrt{6}$	
$\sqrt{7}\,.\,\sqrt{10}\,.\,\sqrt{2}$	
$4\sqrt{24}\,.\,5\sqrt{32}$	

2- Boyutları $5\sqrt{3}$ ve $2\sqrt{6}$ m olan odanın tabanı halı ile kaplanmak isteniyor.

Bu iş için gerekli olan halı kaç m^2 dir?

3-





Alanı, bir kenar uzunluğu $6\sqrt{3}$ cm olan ikizkenar üçgenin alanına eşit olan karenin bir kenar uzunluğu kaç cm dir?

4- **Aşağıdaki işlemleri yapınız.**

$\dfrac{\sqrt{48}\,.\,\sqrt{12}}{\sqrt{30}}$	$\dfrac{5\sqrt{2}\,.\,4\sqrt{20}}{3\sqrt{40}}$
$\dfrac{7\sqrt{18}}{14\sqrt{3}\,.\,\sqrt{12}}$	$\dfrac{\sqrt{8}\,.\,\sqrt{75}}{\sqrt{300}}$

5- $12\sqrt{24}$ birim uzunluğundaki bir çubuk $4\sqrt{6}$ birim uzunluğunda parçalara ayrılmak isteniyor.

Bu işin sonunda kaç adet parça oluşur?

Kareköklü İfadelerde Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Resim sergisi için boyutları $2\sqrt{3}$ ve $4\sqrt{3}$ birim olan tablolara çerçeve yapılacaktır. Çerçevelerin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu düşününüz.

Örnek:

Aşağıdaki toplama işlemlerinin sonuçlarını bulalım.

a) $5\sqrt{7}+2\sqrt{7}$ b) $\sqrt{6}+10\sqrt{6}$ c) $\sqrt{13}+\sqrt{13}$

Çözüm

a) Her iki terimde de $\sqrt{7}$ ortak karekök olduğundan $\sqrt{7}$ parantezine alalım.

$5\sqrt{7}+2\sqrt{7}=(5+2).\sqrt{7}=7\sqrt{7}$

b) Her iki terimi $\sqrt{6}$ parantezine alalım.

$1.\sqrt{6}+10\sqrt{6}=(1+10).\sqrt{6}=11\sqrt{6}$

c) Her iki terimi $\sqrt{13}$ parantezine alalım.

$1.\sqrt{13}+1.\sqrt{13}=(1+1)\sqrt{13}=2\sqrt{13}$

Örnek:

Aşağıdaki çıkarma işleminin sonuçlarını bulalım.

a) $8\sqrt{3}-4\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{2}-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}-3\sqrt{5}$

Çözüm

Katsayıları kendi aralarında çıkaralım. Sonucu ortak karekök parantezinde yazalım.

a) $8\sqrt{3}-4\sqrt{3}=(8-4)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{2}-1.\sqrt{2}=(5-1)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

c) $1.\sqrt{5}-3\sqrt{5}=(1-3)\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$

BİLGİ KUTUSU

Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi yapılırken karekök içindeki sayıları eşit olan terimlerin katsayıları toplamı ya da farkı eşit karekök önüne katsayı olarak yazılır.

$$a\sqrt{x} \mp b\sqrt{x} = (a \mp b)\sqrt{x}$$

Örnek:

$2\sqrt{6} + \sqrt{3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Karekök içleri eşit olmadığı için ifade aynen kalır.

$$2\sqrt{6} + \sqrt{3}$$

Örnek:

$2\sqrt{5} + 14\sqrt{3} + 6\sqrt{5} - \sqrt{3}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Karekök içi eşit olan terimleri kendi aralarında toplayıp çıkaralım.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} + 14\sqrt{3} + 6\sqrt{5} - \sqrt{3} &= (2+6)\sqrt{5} + (14-1)\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{5} + 13\sqrt{3} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek:

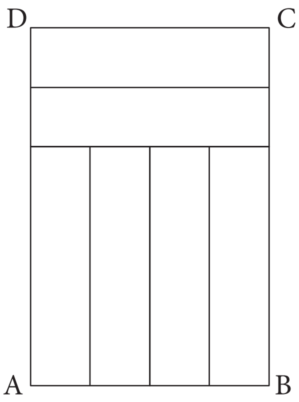
$\sqrt{32} - \sqrt{72} + \sqrt{200}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Karekök içleri eşit olmadığından karekök içindeki tam kare olan sayıları karekökün önüne katsayı olarak yazalım ve işlemi yapalım.

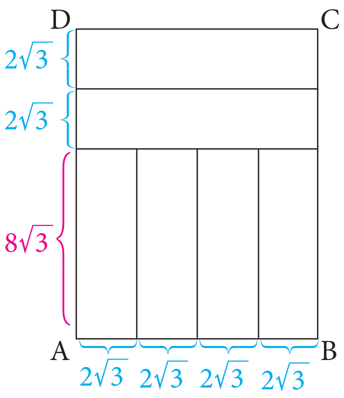
$$\begin{aligned} \sqrt{16.2} - \sqrt{36.2} + \sqrt{100.2} &= \sqrt{4^2.2} - \sqrt{6^2.2} + \sqrt{10^2.2} \\ &= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \\ &= (4-6+10)\sqrt{2} \\ &= 8\sqrt{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek:



Kısa kenarı $2\sqrt{3}$ birim olan altı tane eş dikdörtgen bir araya getirilerek yandaki ABCD dörtgeni elde ediliyor. Elde edilen dörtgenin çevresini bulalım.

Çözüm



ABCD dörtgeninde $|AB| = |DC|$ ve

$$
\begin{aligned}
|AB| = |CD| &= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \text{ olduğundan} \\
&= (2 + 2 + 2 + 2)\sqrt{3} \\
&= 8\sqrt{3} \text{ birim olur.} \\
|BC| = |DA| &= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} \text{ olduğundan} \\
&= (2 + 2 + 8)\sqrt{3} \\
&= 12\sqrt{3} \text{ birim olur.}
\end{aligned}
$$

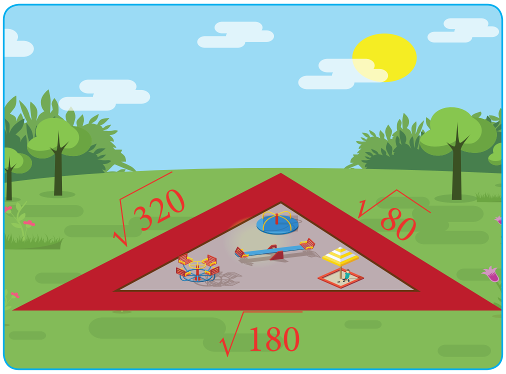
$$
\begin{aligned}
\text{ABCD dörtgeninin çevresi } &= |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \text{ olduğundan} \\
&= 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3} \\
&= (8 + 12 + 8 + 12)\sqrt{3} \\
&= 40\sqrt{3} \text{ birim olur.}
\end{aligned}
$$

Örnek:

Görselde verilen üçgen şeklindeki yürüyüş yolunun uzunlukları

$\sqrt{320}$ birim, $\sqrt{180}$ birim ve $\sqrt{80}$ birimdir.

Yürüyüş yolunun çevresinin uzunluğunu bulalım.



Çözüm

Üçgenin çevresinin uzunluğu tüm kenar uzunluklarının toplamıdır.
Buna göre yürüyüş yolunun çevresi;

$$\begin{aligned}\sqrt{320}+\sqrt{180}+\sqrt{80} &= \sqrt{64.5}+\sqrt{36.5}+\sqrt{16.5}\\ &= 8\sqrt{5}+6\sqrt{5}+4\sqrt{5}\\ &= (8+6+4)\sqrt{5}\\ &= 18\sqrt{5} \text{ birim olur.}\end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $8\sqrt{7}-\sqrt{7}$

b) $2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-5\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{11}+7\sqrt{11}-3\sqrt{11}$

d) $-3\sqrt{15}+7\sqrt{15}$

2- Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $5\sqrt{13}-\sqrt{17}+4\sqrt{17}+2\sqrt{13}$

b) $4\sqrt{9}+3\sqrt{16}-2\sqrt{25}$

c) $\sqrt{75}-\sqrt{48}-\sqrt{12}$

c) $\sqrt{60}+\sqrt{15}-\sqrt{135}$

3- **Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz. Doğru olanının başına "D" yanlış olanlara "Y" harfi yazınız.**

(...) $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{6}$

(...) $\sqrt{90} + \sqrt{10} = 10$

(...) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3} = 0$

(...) $8\sqrt{3} + 5\sqrt{7} = 13\sqrt{10}$

4- Nuran'ın işi ile evi arasındaki mesafe $\sqrt{200}$ km'dir. Nuran yolun $\sqrt{128}$ km'lik kısmını otobüs ile gitmiştir. Kalan yolu ise yürümüştür.

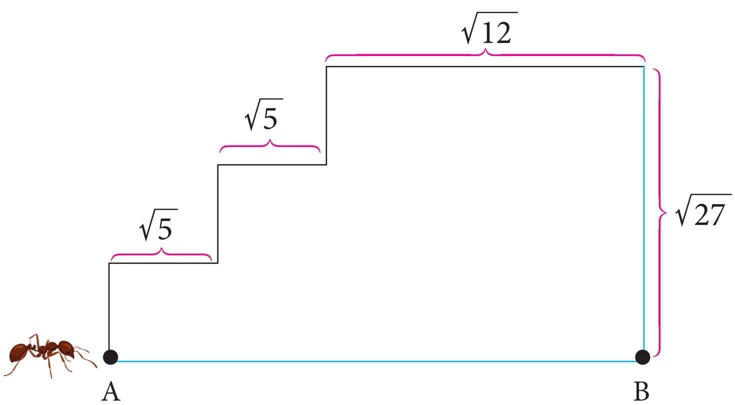
Nuran'ın yürüdüğü mesafe kaç km'dir?

5- 

Yerden, $\sqrt{2000}$ m yükseliğe çıkan balon daha sonra $\sqrt{720}$ m yükskliğe inmiştir.

Balonun yerden yüksekliğini bulunuz.

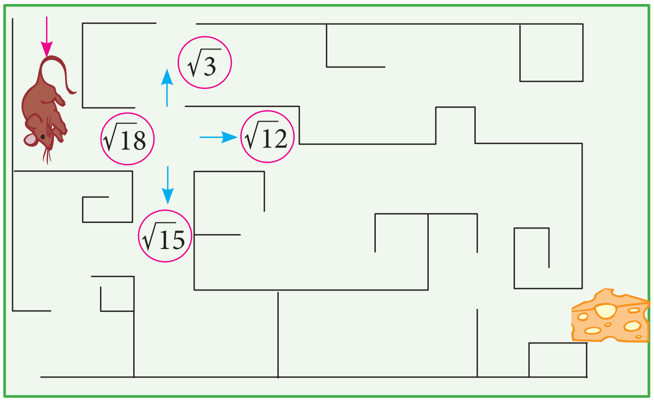
6- Şekildeki karınca, A noktasından B noktasına merdivenin üzerinden gitmek şartıyla yürüşünü tamamlıyor.



Karıncanın aldığı toplam yol kaç br dir?

Kareköklü Bir İfade ile Çarpıldığında Sonucu Bir Doğal Sayı Yapan Çarpanlar

Labirentteki fare, $\sqrt{18}$ ile çarpıldığında sonucu doğal sayı olan çarpanın bulunduğu yoldan devam ederek peynire ulaşacaktır. Sizce fare hangi yolu tercih etmelidir. Düşününüz.



Örnek:

$\sqrt{20}$ sayısının hangi sayılar ile çarpıldığında sonucun bir doğal sayı olacağını bulalım.

Çözüm

$20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$ şeklinde asal çarpanlara ayrılır. $2^2 \cdot 5$ ifadesini tam kare yapan en küçük sayı ile eşitliğin her iki yanını çarpalım.

$20 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5 \cdot 5$ Her iki tarafa karekök alma işlemi uygulayalım.

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2}$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 10 \text{ olur.}$$

$\sqrt{20}$ sayısının $\sqrt{5}$ ile çarpımı bir doğal sayıdır. Aynı zamanda $\sqrt{5}$ sayısının doğal sayı katları olan $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$ … ile $\sqrt{20}$ sayısını çarptığımızda da doğal sayı elde ederiz.

Örnek:

$\sqrt{24}$ ile aşağıdaki sayıların hangilerinin çarpımı doğal sayıdır. Bulalım.

a) $\sqrt{6}$

b) $\sqrt{12}$

c) $3\sqrt{6}$

d) $\sqrt{24}$

Çözüm

$24 = 8 \,.\, 3 = 2^3 \,.\, 3$ şeklinde asal çarpanlara ayrılır. $2^3 \,.\, 3$ ifadesini tam kare yapan en küçük sayı ile eşitliğin her iki yanını çarpalım.

$24 \,.\, 2 \,.\, 3 = 2^3 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 3$

$24 \,.\, 6 = 2^4 \,.\, 3^2$ Her iki tarafa karekök alma işlemi uygulayalım.

$\sqrt{24} \,.\, \sqrt{6} \,. = \sqrt{2^4 \,.\, 3^2}$

$\sqrt{24} \,.\, \sqrt{6} \,. = 12$ olur.

$\sqrt{24}$ sayısının $\sqrt{6}$ ile çarpımı bir doğal sayıdır. $\sqrt{24}$ sayısının doğal sayı katı olan $3\sqrt{6}$ ile çarpımı da doğal sayıdır.

$\sqrt{24} \,.\, \sqrt{24} = \sqrt{24 \,.\, 24} = \sqrt{24^2} = 24$

$\sqrt{24}$ sayısının kendisi ile çarpımının sonucu da doğal sayıdır.

BİLGİ KUTUSU

Aynı köklü iki ifadenin çarpımı doğal sayıdır.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ ’dır.

Örnek:

$\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ sayısının paydasını doğal sayı yapmak için hangi sayı ile çarpmamız gerektiğini bulalım.

Çözüm

Paydanın doğal sayı olması için kareköklü ifadeyi tam kare olacak şekilde bir ifade ile çarpalım.

$\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3 \,.\, \sqrt{5}}{\sqrt{5} \,.\, \sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ olur.

Örnek:

Aşağıdaki ifadelerin paydalarını doğal sayı yapmak için uygun ifadeler ile çarpalım.

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{8}{2\sqrt{3}}$

c) $\frac{4}{\sqrt{8}}$

d) $\frac{9}{\sqrt{12}}$

Çözüm

a) $\underset{(\sqrt{7})}{\frac{5}{\sqrt{7}}} = \frac{5 . \sqrt{7}}{\sqrt{7} . \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\underset{(\sqrt{3})}{\frac{8}{2\sqrt{3}}} = \frac{8 . \sqrt{3}}{2\sqrt{3} . \sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3^2}} = \frac{8\sqrt{3}}{2 . 3} = \frac{8\sqrt{3}}{6}$

c) $\underset{(\sqrt{2})}{\frac{4}{\sqrt{8}}} = \frac{4 . \sqrt{2}}{\sqrt{8} . \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \frac{4\sqrt{2}}{4}$

d) $\underset{(\sqrt{3})}{\frac{9}{\sqrt{12}}} = \frac{9 . \sqrt{3}}{\sqrt{12} . \sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{36}} = \frac{9\sqrt{3}}{6}$

ALIŞTIRMALAR

1- $\sqrt{15}$ sayısı ile çarpıldığında sonucu doğal sayı olan sayılardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Bu ifadeyi doğal sayı yapan sayıları işaretleyiniz.

☐ $\sqrt{3}$	☐ $\sqrt{3}$	☐ $\sqrt{3}$
☐ $\sqrt{15}$	☐ $\sqrt{5}$	☐ $12\sqrt{15}$

2- Örneği inceleyiniz. Çarpım sonuçları doğal sayı olan kareköklü ifadeleri eşleştiriniz.

a) $\sqrt{7}$	I. $5\sqrt{3}$
b) $\sqrt{20}$	II. $2\sqrt{5}$
c) $\sqrt{27}$	III. $\sqrt{6}$
d) $\sqrt{32}$	IV. $\sqrt{28}$
e) $\sqrt{24}$	V. $\sqrt{8}$

3- Aşağıdaki ifadelerin paydalarını örneğe uygun olarak doğal sayıyı yazınız.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$
$(\sqrt{3})$

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{17}{\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{8\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$

Ondalık İfadelerin Karekökü

Sevim $\sqrt{1,21}$ gr yumurta, $\sqrt{1,44}$ gr şeker ve $\sqrt{2,56}$ gr un ile kek yapacaktır. Kek için kullanılan malzemelerin toplam ağırlığını nasıl hesaplayabileceğinizi düşününüz.

Örnek:

Aşağıdaki ifadeleri karekök dışına çıkaralım.

a) $\sqrt{0,04}$ b) $\sqrt{0,25}$

c) $\sqrt{1,69}$ d) $\sqrt{2,25}$

Çözüm

a) $\sqrt{0,04} = \sqrt{\dfrac{4}{100}} = \sqrt{\dfrac{2^2}{10^2}} = \dfrac{2}{10} = 0,2$

b) $\sqrt{0,25} = \sqrt{\dfrac{25}{100}} = \sqrt{\dfrac{5^2}{10^2}} = \dfrac{5}{10} = 0,5$

c) $\sqrt{1,69} = \sqrt{\dfrac{169}{100}} = \sqrt{\dfrac{13^2}{10^2}} = \dfrac{13}{10} = 1,3$

d) $\sqrt{2,25} = \sqrt{\dfrac{225}{100}} = \sqrt{\dfrac{15^2}{10^2}} = \dfrac{15}{10} = 1,5$

BİLGİ KUTUSU

Ondalıklı ifadelerin karekökü alınırken önce karekök içindeki ondalık gösterimler rasyonel sayıya çevrilir. Sonra pay ve paydadaki tam kare sayılar karekök dışına çıkarılarak sonuç bulunur.

Örnek:

Aşağıdaki ifadeleri karekök dışına çıkaralım.

a) $\sqrt{1,\overline{7}}$ b) $\sqrt{2,\overline{7}}$

c) $\sqrt{1,\overline{77}}$ d) $\sqrt{2,7\overline{7}}$

Çözüm

Önce karekök içindeki devirli ondalık sayıları rasyonel sayıya çevirelim. Sonra pay ve paydanın kareköklerini alalım.

a) $1,\overline{7} = \frac{17-1}{9} = \frac{16}{9}$

$$\sqrt{1,\overline{7}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{9}}} = \sqrt{\frac{4^2}{3^2}} = \frac{4}{3}$$

b) $2,\overline{7} = \frac{27-2}{9} = \frac{25}{9}$

$$\sqrt{2,\overline{7}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{5}{3}$$

c) $1,\overline{77} = \frac{177-1}{99} = \frac{\cancel{176}^{16}}{\cancel{99}^{9}} = \frac{16}{9}$

$$\sqrt{1,\overline{77}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{4^2}{3^2}} = \frac{4}{3}$$

d) $2,7\overline{7} = \frac{277-27}{90} = \frac{25\cancel{0}}{9\cancel{0}} = \frac{25}{9}$

$$\sqrt{2,7\overline{7}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{5^2}{3^2}} = \frac{5}{3}$$

Örnek:

Aşağıdaki ifadeleri doğal sayı yapan çarpanlarını bulalım.

a) $\sqrt{4,9}$ b) $\sqrt{16,9}$

Çözüm

a) $\sqrt{4,9} = \sqrt{\dfrac{49}{10}} = \sqrt{\dfrac{49}{10}} = \dfrac{7}{\sqrt{10}}$

Paydadaki kareköklü ifadeden kurtulmak için $\sqrt{10}$ ile çarpalım.

$\dfrac{7}{\cancel{\sqrt{10}}} \cdot \cancel{\sqrt{10}} = 13$

b) $\sqrt{16,9} = \sqrt{\dfrac{169}{10}} = \dfrac{\sqrt{169}}{\sqrt{10}} = \dfrac{13}{\sqrt{10}}$

Paydadaki kareköklü ifadeden kurtulmak için $\sqrt{10}$ ile çarpalım.

$\dfrac{13}{\cancel{\sqrt{10}}} \cdot \cancel{\sqrt{10}} = 13$

ALIŞTIRMALAR

1- **Karekök içindeki ondalık gösterimleri karekökten çıkarınız.**

a) $\sqrt{0,81}$ b) $\sqrt{1,96}$

c) $\sqrt{0,0625}$ d) $\sqrt{0,0256}$

2- **Karekök içindeki devirli sayıları karekökten çıkarınız.**

a) $\sqrt{3,\overline{9}}$ b) $\sqrt{7,\overline{1}}$

c) $\sqrt{13,\overline{4}}$ d) $\sqrt{21,\overline{7}}$

3- **Aşağıdaki ifadelerin doğal sayı çarpanlarını yazınız. Sonuçlarını bulunuz.**

a) $\sqrt{0,4}$ ·............=...........

b) $\sqrt{1,6}$ ·............=...........

c) $\sqrt{12,1}$ ·............=...........

d) $\sqrt{16,9}$ ·............=...........

e) $\sqrt{22,5}$ ·............=...........

Gerçek Sayılar

Mehmet Bey, kenar uzunlukları tam sayı olan kare şeklindeki arsanın bir tarafına buğday, bir tarafınada yonca ekmiştir. Ayrıca arsayı köşegeninden çitlere ayırmıştır. Arsanın bir kenarı tam sayı ise çitlerin uzunluğu rasyonel sayı ile ifade edilebilir mi? Düşününüz.

Örnek:

Aşağıdaki sayıların rasyonel sayı olup olmadığını inceleyelim.

a) $\sqrt{16}$

b) $5,\overline{2}$

c) 3,70182065…

d) $87,1$

Çözüm

a, b tam sayı ve b ≠ o olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel sayı denir. 16 tam kare sayı olduğu için karekök dışına çıkaralım.

a) $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 = \frac{4}{1}$ olur. $\sqrt{16}$ sayısı, $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabildiği için rasyonel sayıdır.

b) Devirli ondalık gösterim rasyonel sayı şeklinde yazılırken paya, sayının tamamından devretmeyen kısmı çıkararak elde ettiğimiz sonucu yazarız. Paydaya ise virgülden sonraki devreden basamak sayısı kadar 9, devretmeyen basamak sayısı kadar 0 (sıfır) yazarız.

$5,\overline{2} = \frac{52-5}{9} = \frac{47}{9}$ olduğundan rasyonel sayıdır.

Diğer bir ifadeyle $5,\overline{2}$ = 5,2222 … sayısının ondalık gösteriminde virgülden sonra devreden sayının olduğu görülür. Bu durumda yukarıdaki yöntemi uyguladığımızda devirli sayıların rasyonel sayı şeklinde yazılabildiğini görürüz.

c) 3,70182065… sayısının ondalık kısmı düzensiz olarak devam eder (devreden bir rakam yoktur). Bu sayı $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamadığından rasyonel sayı değildir.

ç) $87,1 = \frac{871}{10}$ olduğundan rasyonel sayıdır.

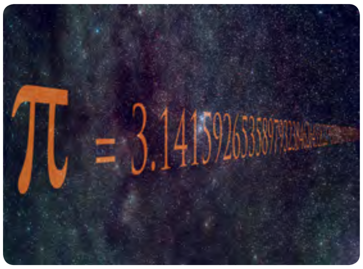
BİLGİ KUTUSU

a, b tam sayı ve b ≠ 0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir.

Gerçek sayılar kümesi rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşiminden oluşur ve **R** ile gösterilir.

Örnek:

π sayısının rasyonel sayı olup olmadığını inceleyelim.



Çözüm

π = 3,141592653…

π sayısının ondalık gösteriminde virgülden sonra devreden rakam yoktur. Bu durumda π sayısı $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamadığı için rasyonel sayı değildir.

Örnek:

Aşağıdaki sayıların rasyonel sayı olup olmadığını inceleyelim.

a) $\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{25}$

c) $-\sqrt{12}$

ç) $5,\overline{42}$

Çözüm

a) $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ olduğunu hesap makinesinden yararlanarak bulabiliriz. $\sqrt{2}$'nin ondalık sayı gösteriminde virgülden sonra devreden rakam yoktur. Bu durumda $\sqrt{2}$, $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamadığından rasyonel sayı değildir.

BİLGİ KUTUSU

Tam kare olmayan sayıların karekökleri irrasyonel sayıdır.

b) $-\sqrt{25} = -\sqrt{5^2} = -5 = -\frac{5}{1}$ olduğundan rasyonel sayıdır.

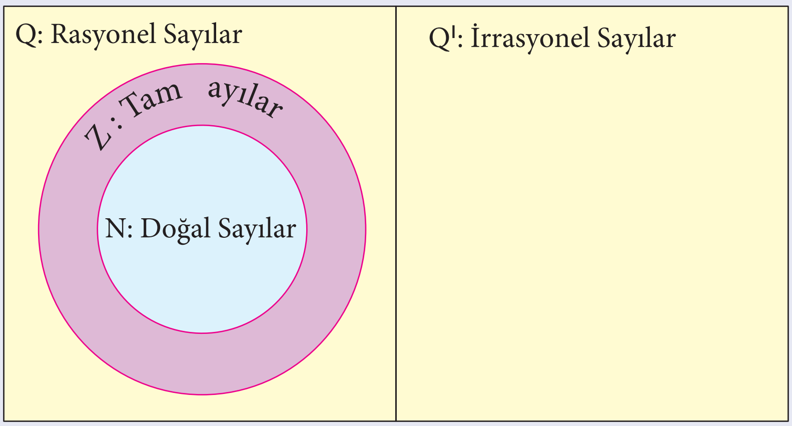
c) $-\sqrt{12} = -\sqrt{4.3} = -\sqrt{2^2.3} = -2\sqrt{3}$ olur. $\sqrt{3}$, $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamadığı için $-\sqrt{12}$ irrasyonel sayıdır.

d) $-5,\overline{42} = -\left(\frac{542-5}{99}\right) = -\frac{537}{99}$ olduğundan rasyonel sayıdır.

BİLGİ KUTUSU

Her doğal sayı, tam sayıdır. Her tam sayı, rasyonel sayıdır. Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayıların tamamına gerçek sayılar denir.

R: Gerçek Sayılar



ALIŞTIRMALAR

1- $\sqrt{3}, -\sqrt{49}, \sqrt{45}, \sqrt{100}, \sqrt{\frac{16}{5}}, \sqrt{\frac{25}{64}}, \sqrt{1}, -\sqrt{1}$

Yukarıda verilen sayıları aşağıdaki tabloda ait oldukları satırlara yazınız.

Rasyonel Sayılar	
İrrasyonel Sayılar	

2- Aşağıda verilen devirli ondalık sayıları, rasyonel sayıya dönüştürünüz.

Devirli Ondalık Gösterim	Rasyonel Sayı
$1,\overline{2}$	
$2,0\overline{5}$	
$4,\overline{73}$	
$0,\overline{85}$	
$0,0\overline{5}$	

3- Aşağıdaki tabloda verilen örnekleri inceleyiniz. Tabloyu tamamlayınız.

Sayı	Rasyonel Sayı	İrrasyonel Sayı	Açıklama
$\sqrt{121}$	✓		121 tam kare sayıdır.
8,052107…		✓	Sayının ondalık kısmı düzensiz olarak devam ediyor.
π			
$\sqrt{5}$			
$\sqrt{1,69}$			
0,120478…			
$\sqrt{1,\overline{34}}$			

VERİ ANALİZİ

Çizgi ve Sütun Grafiklerini Yorumlama

Veri analizi belirli bir amaç için verilerin toplanması, sınıflandırılması, çözümlenmesi ve sonuçlarının yorumlanması esasına dayanan bir bilim dalıdır. Veri analizini iş hayatında, ekonomide, tarımda meteorolojide, istihdam ve işsizlik oranlarını belirlemede, eğitim, kültür, spor ve turizmde, nüfus ve demografi gibi pek çok alanda kullanmaktayız.

2017 yılında yayınlanan OECD obezite raporuna göre obezitenin en çok görüldüğü ülke % 38,2 ile ABD, en az görüldüğü ülke % 3,7 ile Japonya'dır. Türkiye'de ise obezite oranı, OECD ortalamasının üstünde olup % 22,3 seviyesindedir. Elde idelen verilerden 2030 yılında beklenen obezite oranı ABD'de % 47, İngiltere'de % 35, İspanya'da % 21 seviyelerindedir.

Eğitim ve sosyo-ekonomik geçmişin obeziteyi direkt olarak etkilediği görülmektedir. İş bulma, hastalığa yakalanma, üretkenlik ve aylık kazanç konularında obez insanların normal kilodaki insanlara göre dezavantajlı oldukları görülmüştür.

Obezite ile mücadele için OECD ülkelerinde son birkaç yıldır önlemler alınmaya başlanmıştır. Ulaşım politikaları, porsiyon boyutlarının yeniden yapılandırması, sağlıksız ve şekerli yiyeceklerin vergi farkı artışı bunlara örnektir.

Örnek:

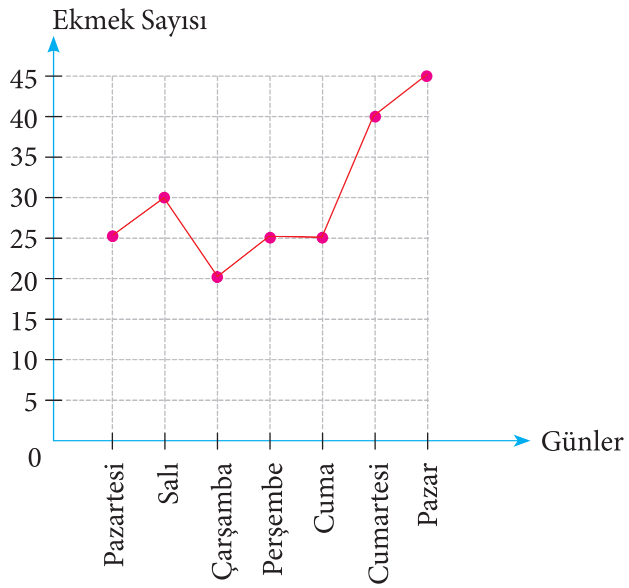
Bir bakkal ekmek satışından kazancının ne olacağına dair bir tahminde bulunmak için bir hafta boyunca sattığı ekmek sayısını aşağıdaki gibi not etmiştir. Bu hastaya göre bakkalın ekmek satışını çizgi grafiği ile gösterelim.

Tablo: Günlere Göre Ekmek Satışı

Günler	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
Ekmek sayısı	25	30	20	25	25	40	45

Çözüm

Yatay ve dikey ekseni çizelim. Yatay eksene günleri, dikey eksene satılan ekmek sayısını yerleştirelim. Günler ile satış sayılarının kesiştiği noktaları işaretleyelim. Son olarak da noktaları çizgiler ile birleştirip grafiğimizi çizelim.



Grafik: Günlere Göre Ekmek Satışı

BİLGİ KUTUSU

Yatay ve düşey eksendeki verilerin kesişerek oluşturduğu noktaların birleştirilmesi ile elde edilen grafik türüne **çizgi grafiği** denir. Çizgi grafiğinde değişkenler süreklidir.

Örnek:

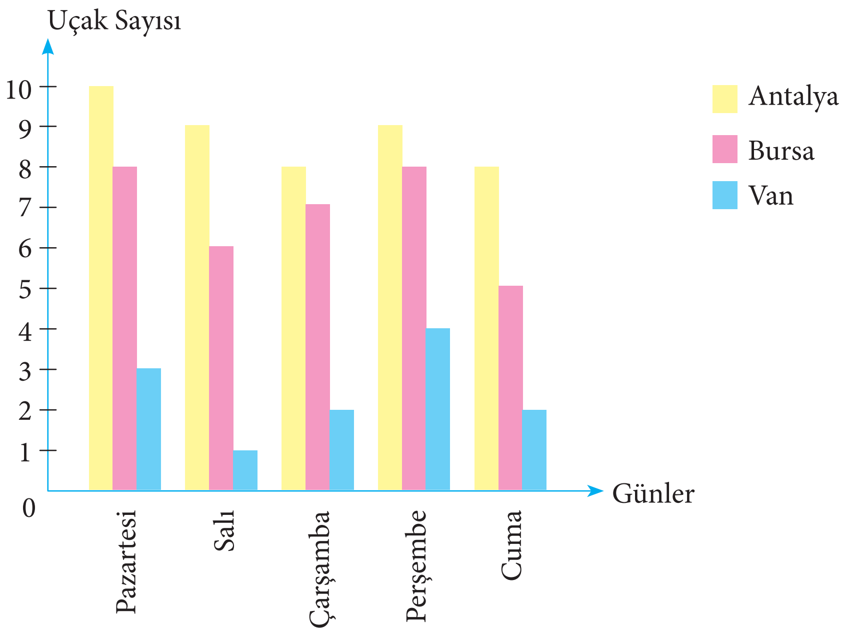
Tablo: Üç Şehre İnen Beş Günlük Uçak Sayısı

	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma
Antalya	10	9	8	9	8
Bursa	8	6	7	8	5
Van	3	1	2	4	2

Yukarıdaki tabloda Antalya, Bursa ve Van illerine inen günlük uçak sayıları verilmiştir. Bu verilere ait sütun grafiğini çizelim.

Çözüm

Grafik: Üç Şehre Beş Günde İnen Uçak sayısı



Grafiği incelediğimizde üç il içerisinde en çok Antalya'ya en az Van' a uçak indi - ğini görürüz.

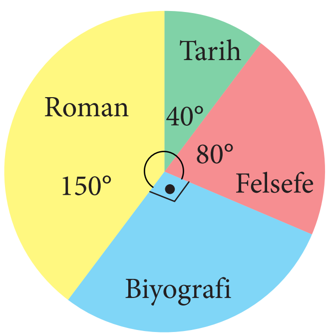
ALIŞTIRMALAR

1- **Tablo:** Sınıflardaki Kız ve Erkek Öğrenci Sayısı

	9 - A	9 - B	9 - C	9 - D
Kız	18	10	8	14
Erkek	12	20	22	16

Bir okuldaki sınıflardaki kız ve erkek sayıları yandaki tabloda verilmiştir. Verileri sütun veya çizgi grafiğinden uygun olanı ile gösteriniz.

2-



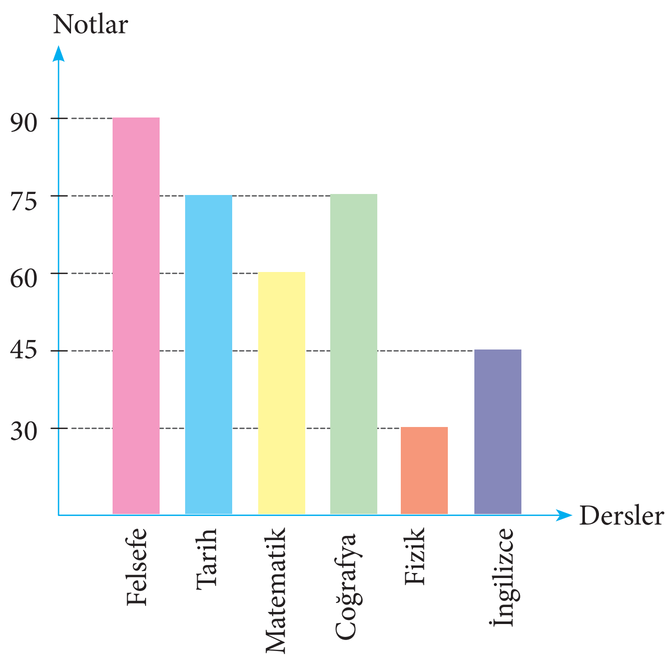
Bir kitabevindeki kitapların türlerine göre bir aylık satışlarının dağılımı daire grafiği ile gösterilmiştir. Bir ayda 180 kitap satıldığına göre bu verileri uygun olan başka grafik türleri ile gösteriniz.

3- **Tablo:** Üniversiteyi Kazanan Öğrenci Sayısı

	2012	2013	2014	2015	2016	2017
A Okulu	60	55	65	60	85	70
B Okulu	75	80	90	100	115	30

A ve B okullarında 6 yılda üniversiteyi kazanan öğrenci sayıları tabloda gösterilmiştir. Tablodaki verilerin en uygun hangi grafik türü ile gösterilebileceğini bulunuz ve grafik türlerini çiziniz.

4- **Grafik:** Derslerin Ortalaması



Bir öğrencinin bir dönemdeki altı dersinin ortalaması yandaki grafikte gösterilmiştir. Bu veriler daire grafiği ile gösterildiğinde fizik dersinin ortalamasına ait daire diliminin merkez açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

Verileri Uygun Grafik İle Gösterme

Bir ailenin bir aylık gelirinin % 20’si eğitime, % 35’i kiraya, % 25 i beslenmeye, % 20’si sağlık harcamalarına gitmektedir. Bu dağılımı, en uygun hangi grafik ile gösterebilirsiniz. Düşününüz.

Örnek:

Tablo: Bir günde Acile Gelen Hastalar

Hastalıklar	Hasta Sayısı
Astım/Koah krizi	30
Kalp Krizi	5
Trafik kazası	10
Zehirlenme	20
Doğum	25
Hipertansiyon	10

Hastanenin acil bölümüne bir gün içerisinde gelen hastaların hangi sebeple geldikleri yandaki tabloda gösterilmiştir. Bu verileri daire grafiği ile gösterelim.

Çözüm

Bir gün boyunca hastanenin acil bölümüne

$30 + 5 + 10 + 20 + 25 + 10 = 100$ kişi geliyor.

Dairesel grafiğin merkez açısının ölçüsü 360° dir.

Astım/Koah krizinden dolayı gelen hasta sayısı:

$\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$’dur. Merkez açısının ölçüsü $\rightarrow 360° \cdot \frac{3}{10} = 108°$ olur.

Kalp krizinden dolayı gelen hasta sayısı:

$\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$’dir. Merkez açısının ölçüsü $\rightarrow 360° \cdot \frac{1}{20} = 18°$ olur.

Trafik kazasından dolayı gelen hasta sayısı:

$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$’dur. Merkez açısının ölçüsü $\rightarrow 360° \cdot \frac{1}{10} = 36°$ olur.

Zehirlenmeden dolayı gelen hasta sayısı:

$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$'tir. Merkez açısının ölçüsü $\rightarrow 360° \cdot \frac{1}{5} = 72°$ olur.

Doğumdan dolayı gelen hasta sayısı:

$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$'tür. Merkez açısının ölçüsü $\rightarrow 360° \cdot \frac{1}{4} = 90°$ olur.

Hipertansiyondan dolayı gelen hasta sayısı:

$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$'dur. Merkez açısının ölçüsü $\rightarrow 360° \cdot \frac{1}{10} = 36°$ olur.

Elde ettiğimiz verilere ait daire grafiği aşağıda gibi olur.

BİLGİ KUTUSU

Verilerin bütün veriler içindeki oranının gösterildiği grafik türüne **daire grafiği** denir. Daire grafiğinde verilen oranı yüzde veya bu orana karşılık gelen merkez açısının ölçüsü ile gösterilir.

Örnek:

Tablo: Bir Ayda Satılan Araç Modeli

Model Adı	Satış Yüzdesi
A Modeli	20
B Modeli	10
C Modeli	30
D Modeli	5
E Modeli	35

Yandaki tabloda bir otomobil firmasının bir ayda sattığı araç modellerinin sayısı verilmiştir. Bu verilerin gösterimi için en uygun grafik türünü belirleyelim. Grafiği çizelim.

Çözüm

Verilerin tüm veriler içindeki oranını ve bunlara karşılık gelen merkez açılarını bulabileceğimize göre daire grafiğini ve sütün grafiğini kullanabiliriz. Her araç modelinin zaman içerisinde satış sayısının nasıl değiştiği bilgisine sahip olmadığımız için verileri çizgi grafiği ile gösteremeyiz.

Her araç modeline karşılık gelen merkez açıyı bulalım.

1 ay boyunca satılan araç sayısı 20 + 10 + 30 + 5 + 35 = 100'dür.

A Modeli için merkez açının ölçüsü : $\frac{20}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow 360° \cdot \frac{1}{5} = 72°$ olur.

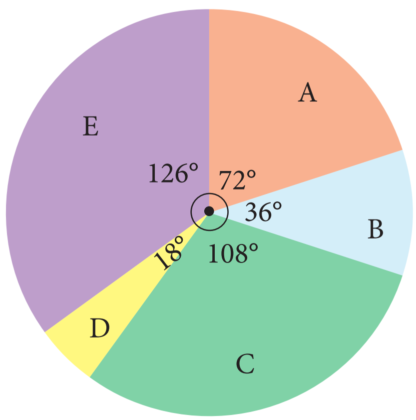
B Modeli için merkez açının ölçüsü : $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} \Rightarrow 360° \cdot \frac{1}{10} = 36°$ olur.

C Modeli için merkez açının ölçüsü : $\frac{30}{100} = \frac{3}{10} \Rightarrow 360° \cdot \frac{3}{10} = 108°$ olur.

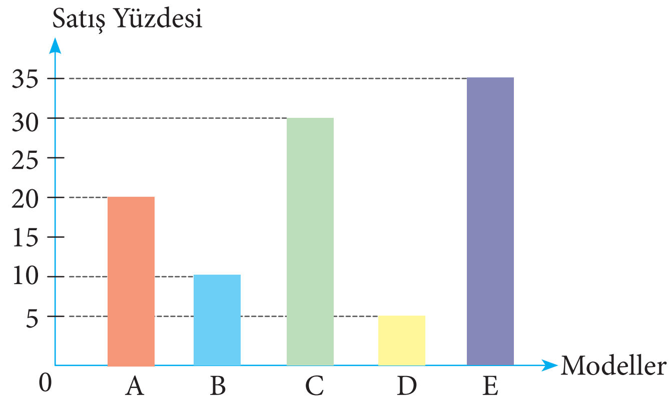
D Modeli için merkez açının ölçüsü : $\frac{5}{100} = \frac{1}{20} \Rightarrow 360° \cdot \frac{1}{20} = 18°$ olur.

E Modeli için merkez açının ölçüsü : $\frac{35}{100} = \frac{7}{20} \Rightarrow 360° \cdot \frac{7}{20} = 126°$ olur.

Grafik: Verilere Ait Daire Grafiği



Grafik: Verilere Ait Sütun Grafiği



BİLGİ KUTUSU

Bir veriyi grafiğe dönüştürürken;

- Bir bütünün parçaları hakkında bilgi verilmiş ise **daire grafiği**,
- Veriler karşılaştırılıyor ise **sütun grafiği**,
- Bir zaman aralığında verilerin sürekli değişimi gözleniyor ise **çizgi grafiği** kullanılır.

Örnek:

Tablo: İki Aracın Hızı

	1. Saat	2. Saat	3. Saat	4. Saat
A Aracı	80	90	100	130
B Aracı	90	120	110	120

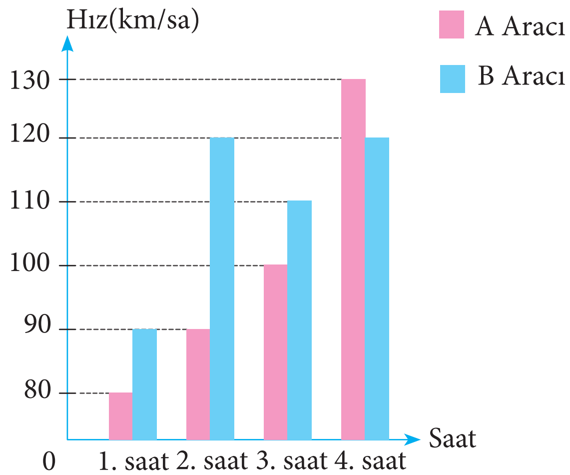
Yandaki tabloda iki aracın hızının dört saat içindeki değişimi (km/sa) verilmiştir. Buna göre verilerin gösterimi için en uygun grafik türünü belirleyerek çizelim.

Çözüm

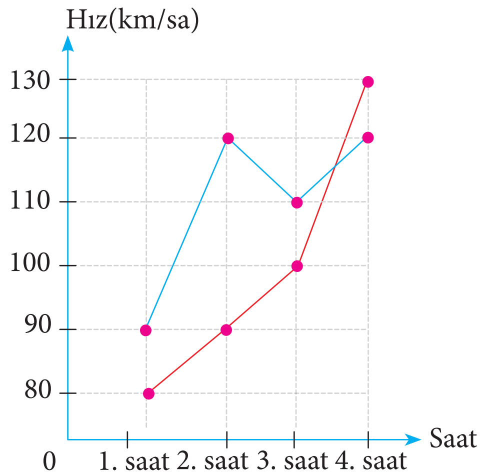
Tablodaki veriler bir bütünün parçaları olmadığından daire grafiği ile gösteremeyiz.

İki aracın hızlarının karşılaştırılması yapılmak isteniyorsa sütün grafiği, zamana göre hızlarındaki değişim gözlemlenmek isteniyorsa çizgi grafiği kullanırız.

Grafik: İki Aracın Hızı



Grafik: İki Aracın Hızı

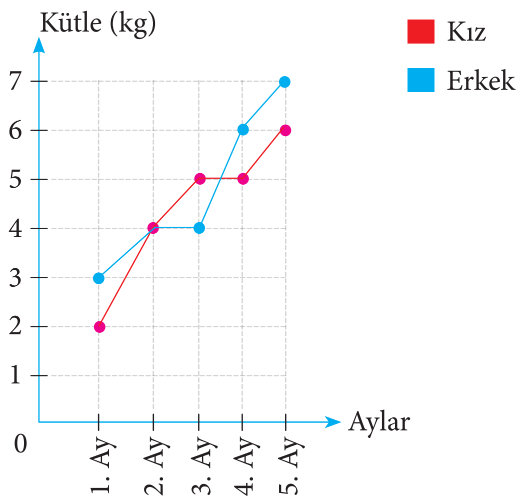


BİLGİ KUTUSU

Yatay ve düşey eksenlerdeki verilerin dikdörtgenlerde gösterildiği grafik türüne **sütun grafiği** denir. Sütun grafiğinde dikdörtgenlerin genişlikleri ve sütunlar arasındaki boşluklar eşittir.

Örnek:

Grafik: Kız ve Erkek Bebeğin
Beş Aylık Gelişimi



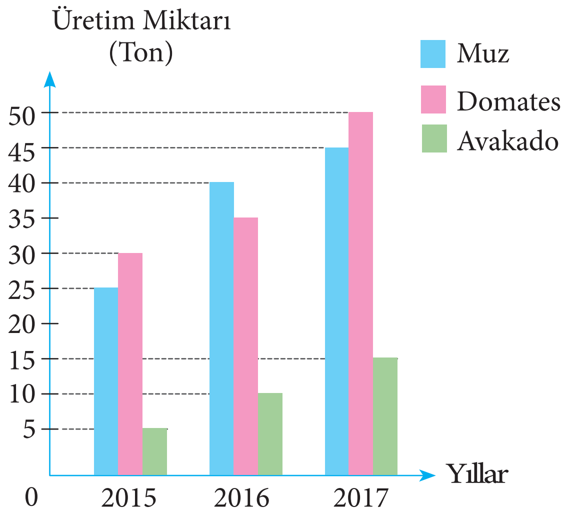
Biri kız biri erkek olan ikiz bebeklerin doğduğu günden itibaren ilk beş ay içinde kütle değişimi, çizgi grafiği ile yandaki gibi verilmiştir. Grafiği inceleyip, yorumlayalım.

Çözüm

Tabloyu incelediğimizde kız bebeğin 2 kg, erkek bebeğin 3 kg doğduğunu görüyoruz. ikinci ay her ikisinin kilosu da birbirine eşittir. Her iki bebekte beş ayın sonunda 4'er kg almıştır.

Örnek:

Grafik: Antalya İline Ait Üç Yıllık Üretim Miktarı (Ton)



Yandaki sütun grafiği, Antalya'nın yıllara göre muz, domates ve avakado üretim miktarını ton olarak göstermektedir. Verilen grafiği inceleyip, yorumlayalım.

Çözüm

Grafiği incelediğimizde en fazla üretimin 2015 yılında domates, 2016 yılında muz ve 2017 yılında domatestir.

2015 yılındaki toplam üretim: 25 ton muz + 30 ton domates + 5 ton avakado = 60 ton

2016 yılındaki toplam üretim: 40 ton muz + 35 ton domates + 10 ton avakado = 85 ton

2017 yılındaki toplam üretim: 45 ton muz + 50 ton domates + 15 ton avakado = 110 ton

olduğunu görüyoruz.

BİLGİ KUTUSU

Bir verinin zaman içeresindeki değişimini göstermek için çizgi grafiği, farklı durumların verilerini karşılaştırmak için sütun grafiği kullanılan en uygun grafik türleridir. Kesin verilerin gösteriminde sütun grafiği kullanılır.

ALIŞTIRMALAR

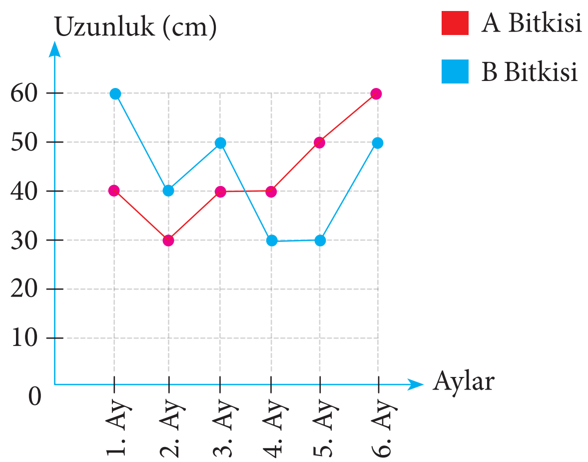
1- **Tablo:** Beş Günde Okunan Kitap Sayfa Sayısı

	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma
Can	25	30	35	30	45
Ayşe	30	25	20	25	35
Metin	20	25	15	20	30

Yukarıdaki tabloda Can, Ayşe ve Metin'in beş gün boyunca okudukları kitapların sayfa sayıları verilmiştir.

Bu verilere ait çizgi grafiğini çiziniz.

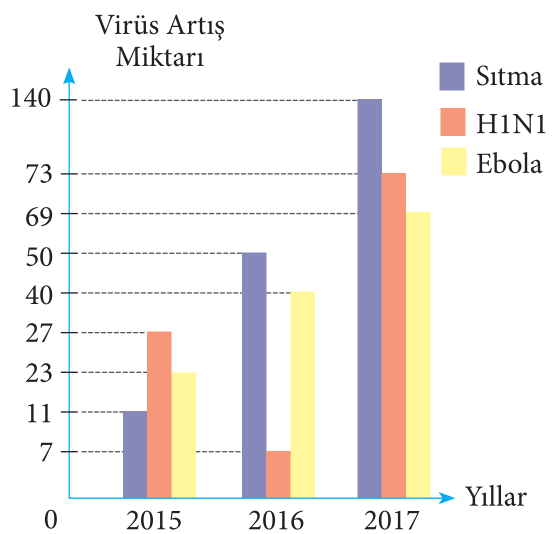
2- **Grafik:** A ve B Bitkilerinin Uzunluğu



Yandaki grafikte A ve B bitkilerinin altı ay boyunca uzunluklarındaki değişim (cm) verilmiştir.

Altı ay boyunca en fazla uzayan bitki hangisidir?

3- **Grafik:** Virüslerin Üç Yıllık Artışı



Yandaki grafikte bazı virüslerin yıllara göre görülme sayıları verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Bu veriler çizgi grafiği ile gösterilir mi?

b) Üç yıl sonunda görülme sayısı sürekli artan virüsler hangileridir?

ÖZET

- Bir tam sayının karesi olan sayılara tam kare pozitif tam sayılar denir. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,… gibi sayılar tam kare pozitif tam sayılardır.
- Bir pozitif tam sayının hangi pozitif tam sayının karesi olduğunu bulma işlemine karekök alma denir. Karekök "$\sqrt{}$" sembolü ile gösterilir.
- Tam kare olmayan kareköklü sayıların hangi ardışık iki doğal sayı arasında olduğunu bulmak için, karekökün içindeki sayıdan önceki ve sonraki tam kare sayılar belirlenir.
- Karekök içindeki bir sayı, asal çarpanlarına ayrıldıktan sonra içindeki tam kare çarpanların karekökleri alınır. Karekök sembolünün başına katsayı olarak yazılır. Diğer çarpanlar ise karekök içinde kalır.

  $\sqrt{a^2 . b} = a\sqrt{b}$,

  $\sqrt{a^2 . b^2 . c} = a . b\sqrt{c}$
- Kareköklü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken karekök önündeki katsayılar kendi arasında çarpılıp katsayı olarak yazılır. Karekök içindeki sayılar ise kendi arasında çarpılıp karekök içine yazılır.

  $a\sqrt{b} . c\sqrt{d} = a . c\sqrt{b . d}$

  $\dfrac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}} = \dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{b}{d}}$
- Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi yapılırken karekök içindeki sayıları eşit olan terimlerin katsayıları toplamı ya da farkı eşit karekök önüne katsayı olarak yazılır.

  $a\sqrt{x} \mp b\sqrt{x} = (a \mp b)\sqrt{x}$

  Aynı köklü iki ifadenin çarpımı doğal sayıdır.

  $\sqrt{a} . \sqrt{a} = a$'dır.
- Ondalık ifadelerin karekökü alınırken önce karekök içindeki ondalık gösterimler, rasyonel sayıya çevrili sonra pay ve paydadaki tam kare sayılar karekök dışına çıkarılarak sonuç bulunur.

- a , b tam sayı ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara irrasyonel sayılar denir.

  Gerçek sayılar kümesi rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşiminden oluşur ve R ile gösterilir.

- π irrasyonel sayı olmasına rağmen işlemlerde kolaylık sağlaması açısından yerine 3; 3,14 veya $\frac{22}{7}$ kullanılır.

- Tam kare olmayan sayıların karekökleri irrasyonel sayıdır.

- Her doğal sayı, tam sayıdır. Her tam sayı, rasyonel sayıdır. Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayıların tamamına gerçek sayılar denir.

- Yatay ve düşey eksendeki verilerin kesişerek oluşturduğu noktaların birleştirilmesiyle elde edilen grafik türüne çizgi grafiği denir. Çizgi grafiğinde değişkenler süreklidir.

- Verilerin bütün veriler içinde oranının gösterildiği grafik türüne daire grafiği denir. Daire grafiğinde verilerin oranı yüzde veya bu orana karşılık gelen merkez açının ölçüsü ile gösterilir.

- Bir veriyi grafiğe dönüştürürken;

  – Veriler karşılaştırılıyor ise sütun grafiği,

  – Bir zaman aralığında verilen sürekli değişimi gözleniyor ise çizgi grafiği kullanılır.

- Yatay ve düşey eksenlerdeki verilerin dikdörtgenlerle gösterildiği grafik türüne sütun grafiği denir. Sütun grafiğinde dikdörtgenlerin genişlikleri ve sütunlar arasındaki boşluklar eşittir.

2.ÜNİTE
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. **Aşağıdaki kareköklü ifadelerin hangisi doğal sayıya eşit değildir?**

A) $\sqrt{49}$ B) $\sqrt{81}$

C) $\sqrt{90}$ D) $\sqrt{121}$

2. **$\sqrt{130}$ sayısı aşağıdaki hangi iki doğal sayı arasındadır?**

A) 10 - 11 B) 11 - 12

C) 12 - 13 D) 13 - 14

3. **$\sqrt{1200}$ sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $20\sqrt{3}$ B) $10\sqrt{6}$

C) $6\sqrt{10}$ D) $20\sqrt{6}$

4. $2\sqrt{3} \,.\, 5\sqrt{2}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{300}$ B) $\sqrt{450}$

C) $\sqrt{500}$ D) $\sqrt{600}$

5. **Bir kenarı $5\sqrt{3}$ birim olan karenin alanı kaç birimkaredir?**

A) 20 B) 45

C) 75 D) $5\sqrt{75}$

6. **Alanı 80 cm^2 olan karenin çevresi kaç cm'dir?**

A) 20 B) $8\sqrt{5}$

C) $12\sqrt{5}$ D) $16\sqrt{5}$

7. $13\sqrt{3}-5\sqrt{3}-4\sqrt{3}+\sqrt{3}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $5\sqrt{3}$ B) $9\sqrt{3}$

C) $13\sqrt{3}$ D) $14\sqrt{3}$

8. $7\sqrt{5}-3\sqrt{5}-4\sqrt{3}+\sqrt{3}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4\sqrt{5}-\sqrt{3}$

B) $4\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

C) $\sqrt{8}$

D) 4

9. $\sqrt{4+\sqrt{29-\sqrt{16}}}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 5

C) 4 D) 3

10. Aşağıdaki sayılardan hangisi $\sqrt{18}$ ile çarpılırsa sonuç doğal sayı olur?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$

C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$

11. $\sqrt{\frac{49}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{4}{3}$

C) 1 D) $\frac{3}{4}$

12. $\sqrt{2,\overline{7}}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 3

C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{5}{3}$

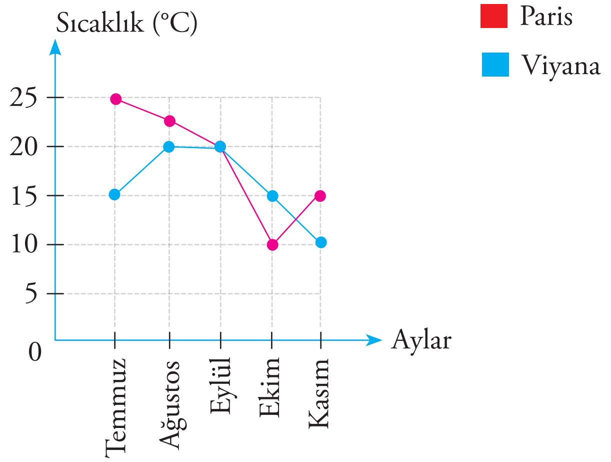
13. $-4, \frac{5}{3}, 0, \sqrt{25}, -\sqrt{36}, \pi, \sqrt{8}$

sayılarından kaç tanesi irrasyonel sayıdır?

A) 2 B) 3

C) 4 D) 5

HAYAT BOYU ÖĞRENME



Viyana ve Paris şehirlerindeki beş aylık hava sıcaklığındaki değişim yanda grafikte gösterildiği gibidir.

Grafik: İki Şehirdeki Beş Aylık Hava Sıcaklığı

14. ve 15. soruları yukarıdaki grafiğe göre cevaplayınız.

14. Verilen grafiğe göre iki şehir arasındaki sıcaklık farkı en fazla hangi aydadır?

A) Temmuz B) Ağustos

C) Ekim D) Kasım

15. Verilen grafiğe göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

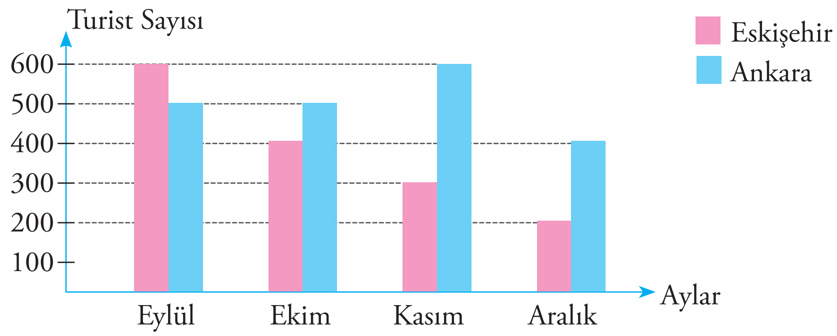
A) Eylül ayında her iki şehirdeki sıcaklık değerleri eşittir.

B) Viyana'da Ağustos - Eylül ayları arasında sıcaklık değişmemiştir.

C) Beş ayda Paris'te daha çok sıcaklık farklı oluşmuştur.

D) Viyana'da sıcaklık hep azalmıştır.

16.



Grafik: Dört Ayda Ankara ve Eskişehir'i Ziyaret Eden Turistler

Yukarıdaki sütun grafiğinde Eskişehir ve Ankara şehirlerini dört ay boyunca ziyaret eden turist sayısı gösterilmiştir.

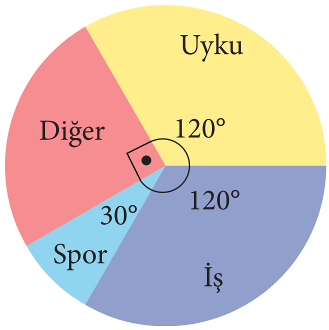
Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) Ankara'ya Kasım ayında Eskişehir'den fazla turist gelmiştir.

B) Yukarıdaki verileri daire grafiği ile gösterebiliriz.

C) Eskişehir'e gelen turist sayısı giderek azalmıştır.

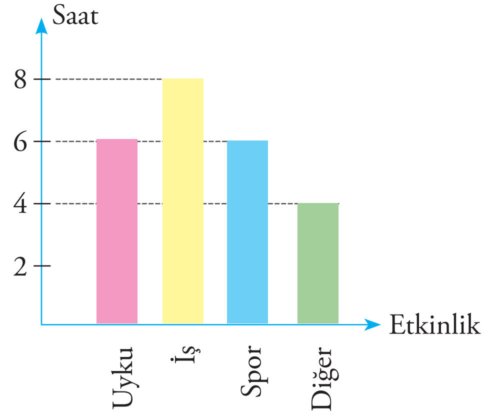
D) Ankaraya en az turist Aralık ayında gelmiştir.

17. 

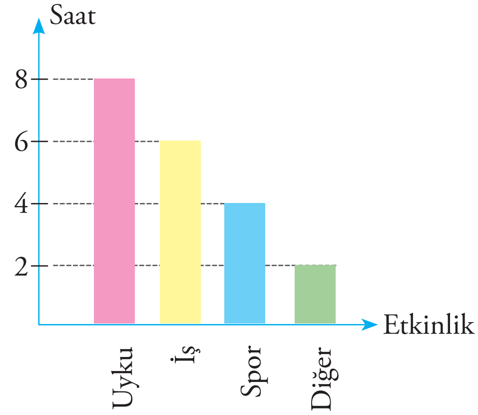
Grafik: Mert'in Bir Günü

Yandaki daire grafiği Mert'in bir günlük zaman dağlımını göstermektedir.

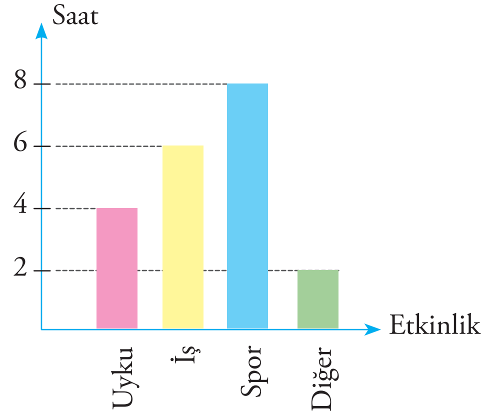
Bu verilere uygun sütun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

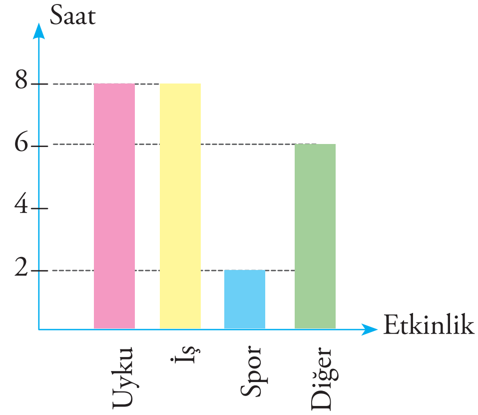
Grafik: Mert'in Bir Günü

B) 

Grafik: Mert'in Bir Günü

C) 

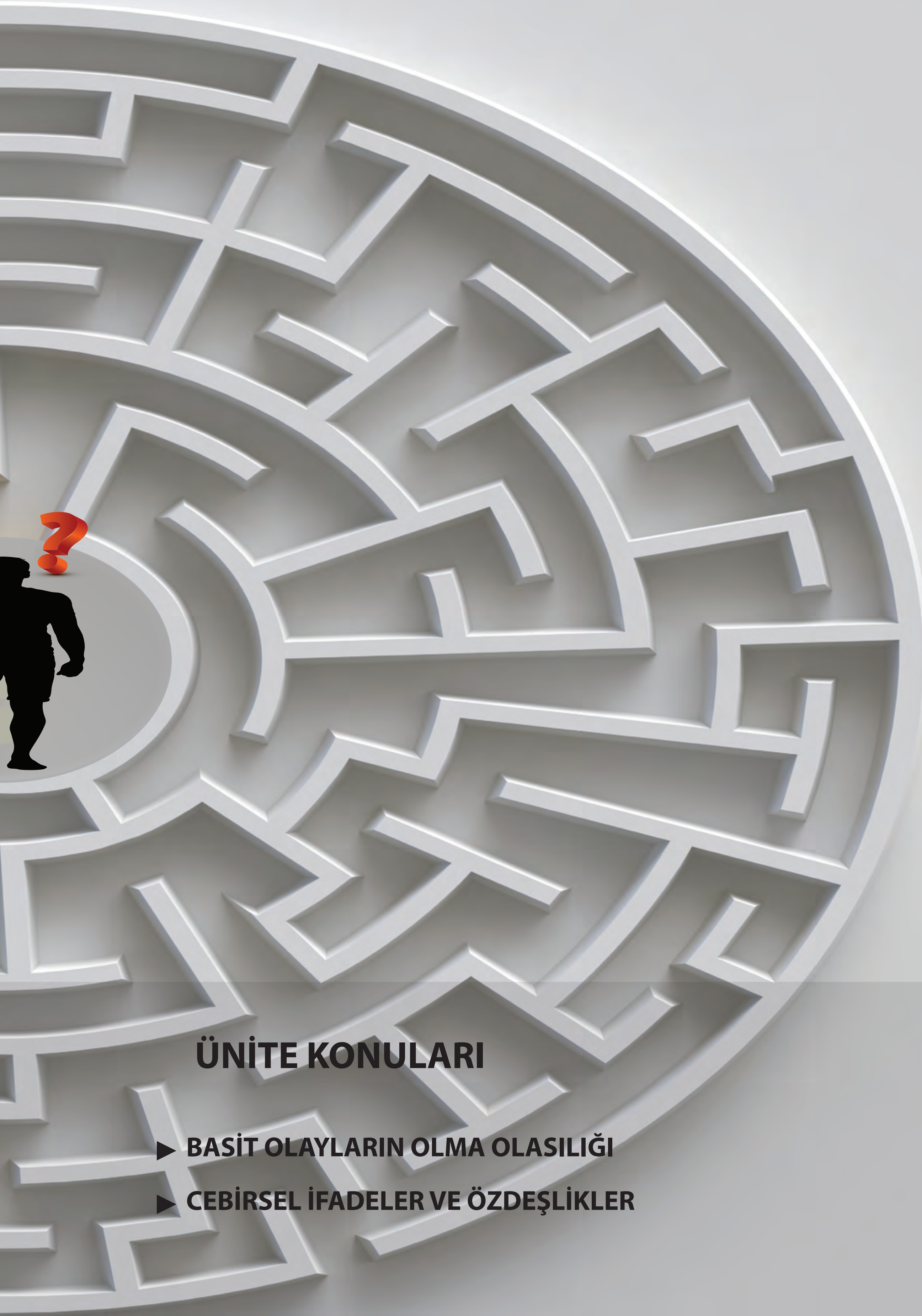
Grafik: Mert'in Bir Günü

D) 

Grafik: Mert'in Bir Günü

3. ÜNİTE

OLASILIK VE CEBİRSEL İFADELER



ÜNİTE KONULARI

- BASİT OLAYLARIN OLMA OLASILIĞI
- CEBİRSEL İFADELER VE ÖZDEŞLİKLER

3. ÜNİTE

• BASİT OLAYLARIN OLMA OLASILIĞI
• CEBİRSEL İFADELER VE ÖZDEŞLİKLER

NELER ÖĞRENECEĞİZ ?

Bu ünitenin birinci bölümününde;

- Bir olaya ait olası durumları belirlemeyi,
- “Daha fazla”, “eşit”, “daha az” olasılıklı olayları ayırt etmeyi,
- Eşit şansa sahip olaylarda her bir çıktının olasılık değerinin eşit olduğunu,
- Olasılık değerinin 0 ile 1 arasında olduğunu,
- Basit olayların olma olasılığını hesaplamayı öğreneceğiz.

Bu ünitenin ikinci bölümününde;

- Basit cebirsel ifadeleri anlamayı ve farklı bölümlerde yazmayı,
- Cebirsel ifadelerin çarpımını yapmayı,
- Özdeşlikleri modellerle açıklamayı,
- Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırmayı öğreneceğiz.

ANAHTAR KAVRAMLAR

- Olasılık
- Olay
- İmkânsız olay
- Özdeşlik
- Çıktı
- Eş olasılık
- Kesin olay
- Çarpanlara ayırma

OLASILIK

Olası Durumları Belirleme

Tarih boyunca insanoğlu tarafından en çok merak edilen konulardan biri gelecekte ne olacağıdır. Geleceğe yolculuk, gelecekte kullanılacak araçlara dair öngörüler, yeni buluşlar ilgi çekmektedir. Geleceğe dair her kurgu belirsizdir. Bilim alanlarında belirsizliğin olduğu yerlerden matematikten, matematikte de olasılıktan bahsederiz. Nüfusu hızla artan bir dünyada geleceğe yönelik ihtiyaç belirleme ve ekonomik öngörülerde bulunma zorunluluğu olasılığın gelişmesini sağlamıştır. Etrafımızdaki birçok olay, olasılık hesapları temelinde gerçekleşir.

Örneğin;

Şehir içinde trafik ışıklarının yanma sırasının ve süresinin belirlenmesi

Şehir içinde kullanılan otobüslerin hangi sıklıkla sefer yapacağı

Petrol, altın ve döviz değerlerinin tahmini

Eldeki verilerle hava durumu tahmini

Parayı havaya 5 kez attınız. Üst yüze turamı yoksa yazı mı geldi? İkinci bir defa bu deneyi yaptığınızda sizce sonuç farklı olur mu? Olasılık şans mıdır yoksa bilimsel temeli olan bir tahmin etme yöntemi midir? Düşününüz.

Örnek:

Havaya atılan bir madeni paranın üst yüzüne gelebilecek olası durumları belirleyelim

Çözüm

Madeni parayı havaya attığımızda üst yüze tura veya yazı gelebilir.

Yazı

Tura

BİLGİ KUTUSU

Olayların gelişimi ile ilgili yeni bilgi edinmek için yapılan deneme ve testlere **deney** denir. Bir deneyin sonuçlarının her birine **çıktı** denir. Bir deneyde gerçekleşmesini istediğimiz durumlara **olay** denir. Bir deneyin bütün çıktılarının oluşturduğu durumlara **olası durumlar** (örnek uzay) denir. Bir olayın gerçekleşme ihtimalinin matematiksel değerine **o olayın olasılığı** denir.

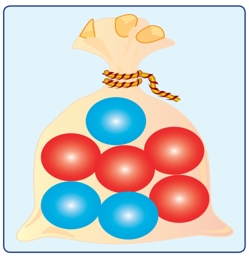
Örnek:

Bir zarın havaya atılması deneyinde deney, çıktı, olay, olası durum ve olasılık kavramlarını inceleyelim.

Çözüm

Zarın havaya atılmasına deney denir. Zarın havaya atılması sonucunda üst yüze 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 gelmesi olayın çıktılardır. Üst yüze çift sayılardan (2, 4 ve 6) herhangi birinin gelmesi bir olaydır. Zarın altı yüzü olduğu için üst yüze gelebilecek 6 olası durum vardır. Zarın havaya atılması deneyinde istenen bir olayın gerçekleşme ihtimaline ise olasılık denir.

Örnek:



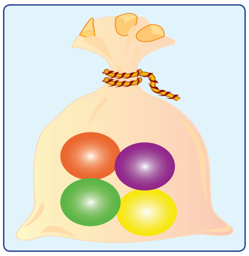
Bir torbada aynı büyüklükte 3 mavi, 4 kırmızı top vardır. Torbadan rastgele bir top çekilmesi olayı ile elde edilebilecek çıktıları bulalım.

Çözüm

Torbada 3 mavi, 4 kırmızı olmak üzere toplam 7 top vardır.

Bu durumda yapılan işlemin çıktıları 7'dir.

Örnek:



Bir torbada aynı büyüklükte 1 mor, 1 turuncu, 1 sarı ve 1 yeşil top vardır. Bu torbadan aynı anda iki tane top çekilecektir. Elde edilebilecek çıktıları bulalım.

Çözüm

Torbadan iki top çekildiğinde oluşabilecek çıktılar aşağıdaki gibidir.

Y = Yeşil, T = Turuncu, M = Mor, S = Sarı

Çekilen Toplar		
Yeşil, Sarı	⇒	YS
Yeşil, Mor	⇒	YM
Yeşil, Turuncu	⇒	YT
Turuncu, Sarı	⇒	TS
Turuncu, Mor	⇒	TM
Sarı, Mor	⇒	SM

olmak üzere 6 farklı durum oluşur.

Bu durumda yapılan işlemde elde edilen tüm çıktılar; YS, YM, YT, TS, TM ve SM olmak üzere 6 tanedir.

Örnek:

12 kız, 15 erkek öğrencinin bulunduğu bir sınıftan

a) 1 öğrenci,

b) 1 kız öğrenci,

c) 1 erkek öğrencinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulalım.

Çözüm

Sınıfta 12 kız, 15 erkek olmak üzere 12 + 15 = 27 kişi vardır.

a) 27 kişilik bir sınıftan 1 öğrenci 27 farklı şekilde seçilebilir.

b) 12 kız öğrenci içinden 1 kız öğrenci 12 farklı şekilde seçilebilir.

c) 15 erkek öğrenci içinden 1 erkek öğrenci 15 farklı şekilde seçilebilir.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıdaki cümlelerde noktaları yerlere "çıktı, olay, olası durumlar" **kelimelerinden uygun olanını yazınız.**

a) Bir deneyin sonuçlarının her birine .... denir.

b) Bir deneyde gerçekleşmesini istediğimiz durumlara .... denir.

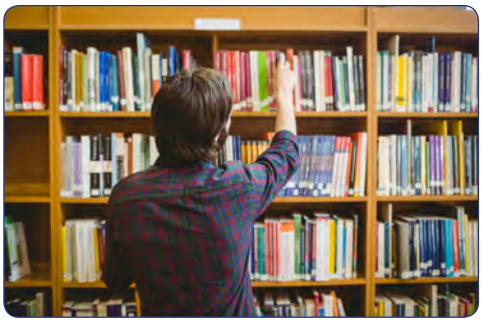
c) Bir deneyin bütün çıktılarının oluşturduğu durumlara .... denir.

2- Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D" **yanlış olanların yanına** "Y" **yazınız.**

	D / Y
Bir madeni paranın havaya atılması deneyindeki çıktı sayısı 3'tür.	(...)
Bir zarın havaya atılması deneyinde 6 çıktı vardır.	(...)
Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze asal sayı gelme olayının çıktısı 1'dir.	(...)

3- Selin İstanbul'dan Kars'a gitmek için tren, otobüs, uçak ya da araba araçlarından birini kullanacaktır.

Kars'a kara yolu ile gitmeye karar veren Selin'in kullanabileceği araçların olası durumlarını bulunuz.

4- 

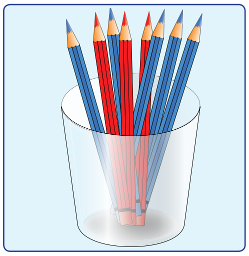
Alpay, kitapçıda okumak istediği 5 roman, 4 hikâye, 3 tarih kitabı içinden bir tane kitap satın alacaktır.

Kitabın seçilmesindeki olası durumların sayısını bulunuz.

Daha fazla, Eşit, Daha Az Olayların Olasılıkları

Orhan, menüsünde bulunan 5 çorba, 3 yemek, 2 salata içinden sadece bir tanesini yiyecektir. Orhan'ın yiyecekler içinden hangisini seçme olasılığı daha fazladır?

Örnek:



Yandaki kalemlikte 3 kırmızı, 5 mavi kalem vardır. Kalemlikten seçilen bir kalemin kırmızı olma olasılığı ile mavi olma olasılığını inceleyelim.

Çözüm

Kalemlikte 3 kırmızı, 5 mavi kalem vardır. Mavi kalemlerin sayısı kırmızı kalemlerin sayısından daha fazladır. Bu nedenle seçilen kalemin mavi olma olasılığı daha fazladır. Kırmızı kalemlerin sayısı daha az olduğundan seçilecek kalemin kırmızı olma olasılığı daha azdır.

Örnek:

Ece'nin elbise dolabında 8 etek ve 8 pantolon vardır, Rastgele seçilen bir kıyafetin etek olma olasılığı ile pantolon olma olasılığını inceleyelim.

Çözüm

Elbise dolabında bulunan etek ve pantolon sayıları eşittir. Rastgele seçilecek bir kıyafetin etek ya da pantolon olma olasılıkları da eşittir.

Örnek:

Bir raftaki 4 matematik ve 4 fizik kitabı içinden rastgele bir fizik kitabı seçilecektir. Fizik kitabının seçilme olasılığının matematik kitabının seçilme olasılığından daha az olması için raftan hangi derse ait kitabın çıkarılması gerektiğini inceleyelim.

Çözüm

Rafta eşit sayıda matematik ve fizik kitabı vardır. Bu durumda seçilen kitabın fizik olma olasılığı matematik olma olasılığına eşittir. Raftan bir fizik kitabını çıkardıktan sonra seçme işlemi yapıldığında fizik gelme olasılığı matematik gelme olasılığına göre daha az olur.

ALIŞTIRMALAR

1- 

Yağmur ayakkabıcıdaki 15 çift çizme, 14 çift ayakkabı içinden bir çift seçecektir.

Verilen bilgilere göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanı işaretleyiniz.

Ayakkabı seçme olasılığı çizme seçme olasılığına göre daha fazladır.	(…)
Ayakkabı seçme olasılığı ile çizme seçme olasılığı eşit	(…)
Ayakkabı seçme olasılığı çizme seçme olasılığına göre daha azdır.	(…)

2- Bir torbada bulunan 6 yeşil, 5 sarı topun içinden rastgele bir top seçilecektir.

Seçilen topun yeşil olma olasılığı ile sarı olma olasılığının eşit olması için torbadan hangi renkte top çıkarılmalıdır?

Eşit Şansa Sahip Olayların Olasılığı

Ahmet'in havaya attığı zarların üst yüzüne 6 gelirse serhan oyunu kaybedecektir. Havaya atılan zarın üst yüzünde 6 gelmesi ile gelmemesinin olasılığını düşününüz.

Örnek:

Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze gelen sayıların olasılığını inceleyelim.

Çözüm

Zarın altı yüzü vardır. Zar havaya atıldığında elde edilen çıktılar 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 olmak üzere altı tanedir.

1 gelme olasılığı bütün çıktıların $\frac{1}{6}$'i kadardır.

2 gelme olasılığı bütün çıktıların $\frac{1}{6}$'i kadardır.

3 gelme olasılığı bütün çıktıların $\frac{1}{6}$'i kadardır.

4 gelme olasılığı bütün çıktıların $\frac{1}{6}$'i kadardır.

5 gelme olasılığı bütün çıktıların $\frac{1}{6}$'i kadardır.

6 gelme olasılığı bütün çıktıların $\frac{1}{6}$'i kadardır.

Sonuç olarak üst yüze her rakamın gelme olasılığı birbirine eşittir.

BİLGİ KUTUSU

Bir olaydaki her bir çıktının olasılığı birbirine eşit ise bu olaya **eş olasılıklı olay** denir. n olası durum içerisinden her bir çıktının olma olasılığı $\frac{1}{n}$'dir.

Örnek:

ANKARA kelimesinin harfleri kartlara yazılarak bir torbaya atılıyor. Torbadan çekilen bir kartın üzerinde;

a) K harfi yazma,

b) N harfi yazma,

c) A harfi yazma

olasılıklarını bulalım.

Çözüm

ANKARA kelimesinde altı tane harf olduğundan olası durum sayısı 6'dır. Torbada 3 tane A, 1 tane N, 1 tane K ve 1 tane R harfi yazılı kağıt vardır.

a) K harfinin çekilme olasılığı $= \dfrac{\text{K harfinin gelme durum sayısı}}{\text{Tüm harflerin sayısı}} = \dfrac{1}{6}$ olur.

b) N harfinin çekilme olasılığı $= \dfrac{\text{N harfinin gelme durum sayısı}}{\text{Tüm harflerin sayısı}} = \dfrac{1}{6}$ olur.

c) A harfinin çekilme olasılığı $= \dfrac{\text{A harfinin gelme durum sayısı}}{\text{Tüm harflerin sayısı}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ olur.

Sonuç olarak N, K ve R harflerinden eşit sayıda olduğu için olasılık değerleri birbirine eşittir. A hangisinden daha fazla olduğu için olasılık değeri diğer harflere göre daha fazladır.

Örnek:

1, 1, 3, 5, 5, 5

Yukarıdaki karamların yazılı olduğu kâğıtlar içerisinden çekilen bir kâğıdın üzerinden 1, 3 ve 5 yazma olasılıklarını karşılaştıralım.

Çözüm

6 rakamının içinde,

“1” rakamından 2 tane, “3” rakamından 1 tane,

“5” rakamından 3 tane vardır.

“1” rakamının çekilme olasılığı $= \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ olur.

“3” rakamının çekilme olasılığı $= \frac{1}{6}$

“5” rakamının çekilme olasılığı $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.

Yukarıda da görüldüğü gibi her bir rakamdan farklı sayıda bulunduğu için eşit şansa sahip olaylar değildir.

BİLGİ KUTUSU

Olasılık bir olayın olma şansına (olabilirliğine) ilişkin bir ölçümdür.

ALIŞTIRMALAR

1- **Bir madeni paranın havaya atılması deneyinde paranın üst yüzüne tura veya yazı gelmesi olayını inceleyiniz.**

2- **Bir zarın havaya atılması deneyinde zarın üst yüzüne 2 veya 6 gelmesi olayını inceleyiniz.**

3- “BALABAN” **kelimesindeki harfler kâğıtların üzerine yazılarak bir torbaya atılıyor. Seçilen bir kâğıdın üzerine gelebilecek harflerin seçilme olasılıklarının eşit şansta olup olmadığını inceleyiniz.**

4- 747847 **sayısındaki rakamların yazılı olduğu kâğıtlar içerisinden seçilen bir kâğıdın üzerinde;**

a) 7 yazma,

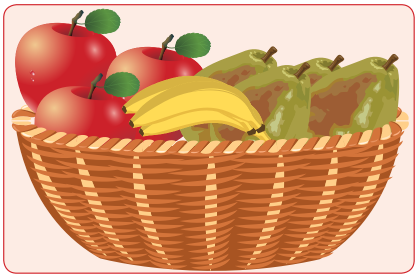
b) 4 yazma,

c) 8 yazma

olasılıklarını bulunuz.

Olasılık Değerinin 0 ile 1 Arasında Olması

Pikniğe giderken sepetine 3 muz, 3 elma, 4 armut koyan Ümran'ın sepetten seçeceği bir mevyenin karpuz olma olasılığı düşününüz.



Örnek:

Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze;

a) 7 rakamının gelme olasılığını

b) 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 rakamlarından birinin gelme olasılığını bulalım.

Çözüm

Zar havaya atıldığında üst yüze 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 rakamlarından biri gelebilir.

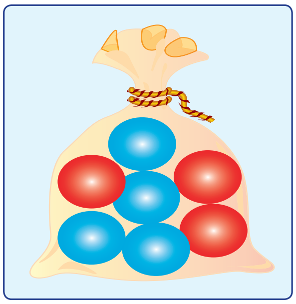
a) 7 rakamının gelme olasılığı $= \dfrac{\text{7 rakamının gelme sayısı}}{\text{Zarın üzerindeki tüm rakamların sayısı}} = \dfrac{0}{6}$

$= 0$ imkansız olaydır.

b) Üst yüze gelebilecek rakamlar $= \dfrac{\text{Zarın üzerindeki tüm rakamların sayısı}}{\text{Zarın üzerindeki tüm rakamların sayısı}} = \dfrac{6}{6} = 1$

kesin olaydır.

Örnek:



Bir torbanın içinde aynı büyüklükte 4 mavi, 3 kırmızı renkli top vardır. Torbanın içinden çekilen bir topun;

a) Mavi renkli olma olasılığını,

b) Mavi renkli olmama olasılığını bulalım.

Çözüm

Torbadaki toplar aynı büyüklükte olduğundan işlemin bütün çıktıların olasılığı eşittir.

Torbanın içinde 4 + 3 = 7 tane top vardır.

a) Mavi top seçme olasılığı $= \dfrac{\text{Mavi renkli top sayısı}}{\text{Tüm topların sayısı}} = \dfrac{4}{7}$'tür.

b) Mavi top seçmeme olasılığı $= \dfrac{\text{Kırmızı renkli top sayısı}}{\text{Tüm topların sayısı}} = \dfrac{3}{7}$'tür.

Mavi top seçme olasılığı ile seçmeme olasılığı toplamı:

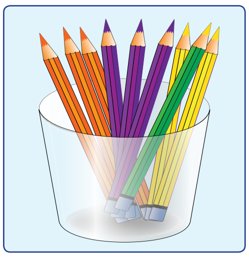
$$\frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{7}{7} = 1 \text{ olur.}$$

BİLGİ KUTUSU

Bir olayın olma olasılığı 0 (sıfır) 1 arasındadır. Gerçekleşmesi mümkün olmayan olaylara **imkansız olay** denir ve gerçekleşme olasılığı **"0"** dır. Gerçekleşmesi **kesin olan** olaylara **kesin olay** denir ve gerçekleşme olasılığı **"1"** dir.

Bir olayın olma olasılığı ile olmama olasılığı toplamı 1'dir.

Örnek:



Bir kalemlikte aynı büyüklükte 3 turuncu, 3 mor, 2 sarı ve 1 yeşil kalem vardır. Kalemlikten rastgele seçilen bir kalemin;

a) Turuncu renkli kalem olma olasılığını,

b) Sarı renkli kalem olmama olasılığını,

c) Yeşil renkli kalem olmama olasılığını,

ç) Beyaz renkli kalem olmama olasılığını,

d) Siyah kalem olmama olasılığını

bulalım.

Çözüm

Kalemlikteki kalemler aynı büyüklükte olduğundan işlemin bütün çıktılarının olasılığı eşittir.

Kalemlikte 3 + 3 + 2 + 1 = 9 kalem vardır.

a) $\text{Turuncu kalem olma olasılığı} = \dfrac{\text{Turuncu kalemlerin sayısı}}{\text{Tüm kalemlerin sayısı}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ olur.

b) $\text{Sarı kalem olmama olasılığı} = \dfrac{\text{Sarı dışındaki kalemlerin sayısı}}{\text{Tüm kalemlerin sayısı}} = \dfrac{3+3+1}{9} = \dfrac{7}{9}$ olur.

c) $\text{Yeşil kalem olmama olasılığı} = \dfrac{\text{Yeşil dışındaki kalemlerin sayısı}}{\text{Tüm kalemlerin sayısı}} = \dfrac{3+3+2}{9} = \dfrac{8}{9}$ olur.

ç) Kalemlikte beyaz kalem yoktur. O hâlde

$$\text{Beyaz kalem olmama olasılığı} = \frac{\text{Beyaz kalemlerin sayısı}}{\text{Tüm kalemlerin sayısı}} = \frac{0}{9} = 0\,(\text{imkansız olay})$$

d) Kalemlikte siyah kalem yoktur. O hâlde

$$\text{Siyah kalem olmama olasılığı} = \frac{\text{Siyah dışındaki kalemlerin sayısı}}{\text{Tüm kalemlerin sayısı}} = \frac{9}{9} = 1\,(\text{kesin olay})$$

Örnek:

Ece ve Deniz ok atma sporu yapıyorlar. Ok atışlarında hedefi vurma olasılıkları sırasıyla $\dfrac{2}{3}$ ve $\dfrac{1}{2}$'dir. Her iki okçunun ayrı hedeflere bir atış yapması işleminde, her bir okçu için hedefi vuramama olaylarının olasılıklarını karşılaştıralım.

Çözüm

Atılan atışta hedefin vurulma olasılığı ile vurulmama olasılığının toplamı 1 dir.

Ece'nin hedefi vuramama olasılığı : $1-\frac{2}{3}=\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Deniz'in hedefi vuramama olasılığı : $1-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ olur.

$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ olduğundan Deniz'in hedefi vuramama olasılığı Ece'nin hedefi vuramama olasılığından daha fazladır.

ALIŞTIRMALAR

1- Bir sınıfta 8 öğrenci gözlük, 4 öğrenci lens kullanmaktadır. 12 öğrenci ise gözlüksüzdür.

Buna göre bu sınıftan seçilen bir öğrencinin

a) Gözlüksüz olma olasılığını,

b) Öğrenci olma olasılığını,

c) Gözlüklü olmama olasılığını bulunuz.

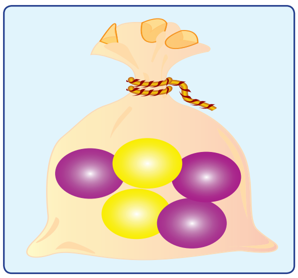
2- **Bir madeni paranın havaya atılması deneyinde üst yüze**

a) Tura gelme olasılığını,

b) Tura gelmeme olasılığını,

c) İki yüzünden birinin gelme olasılığını

bulunuz.

3- 

Bir torbada aynı büyüklükte 2 sarı, 3 mor top vardır. Torbadan bir top çekiliyor.

Aşağıdaki tabloyu yukarıda verilen bilgilere göre doldurunuz.

İstenen Durum	İmkansız Olay	Kesin Olay
Topun kırmızı olma olasılığı		
Top olma olasılığı		
Topun siyah olma olasılığı		

Basit Olayların Olasılığı

Atakan tatil için gittiği otelde numarası çift olan bir odada kalmak istiyor. Atakan'ın numarası çift olan bir odada kalma olasılığı kaçtır? Düşününüz.

Örnek:

Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze çift sayı gelme olasılığını hesaplayalım.

Çözüm

Zarın hayava atılması deneyinde elde edilen çıktılar 1, 2, 3, 4, 5 ve 6'dır. Tüm olası durumlar içerisinde çift sayı olanlar 2, 4 ve 6'dır. Buna göre

Çift sayı gelme olasılığı $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.

Örnek:

Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze asal sayı gelme olasılığını hesaplayalım.

Çözüm

Zarın havaya atılması deneyindeki çıktılar içerisinden asal sayı olanlar 2,3 ve 5'tir. Buna göre

Asal sayı gelme olasılığı $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.

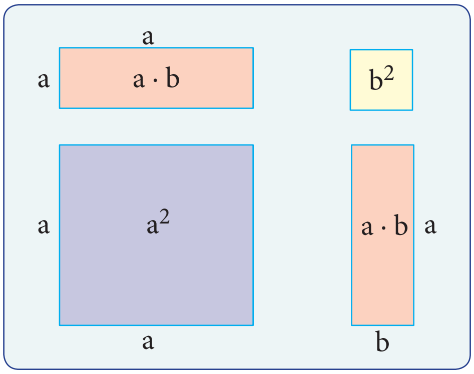
ALIŞTIRMALAR

1- **Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze 4'den büyük sayı gelme olasılığının bulunuz.**

2- **Bir zarın havaya atılması deneyinde üst yüze tek sayı gelme olasılığının bulunuz.**

CEBİRSEL İFADELER VE ÖZDEŞLİKLER

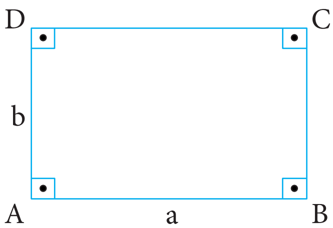
Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler



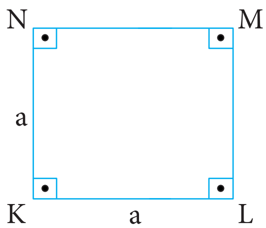
Cebirin atası olarak bilinen El-Harezmî'nin "El - Cebr ve' I-mukabele'si bilime yaptığı en büyük katkıdır. Bilgisayarların yazılım sistemlerinde, fen bilimleri ve mühendislikte, istatistiksel çalışmalarda, ekonomide hesap yapılırken cebirden yararlanılır. Yandaki şekilde kenar uzunlukları a ve b birim olan dikdörtgenler ile kenar uzunlukları a birim, b birim olan karelerin alanları cebirsel ifadelerle gösterilmiştir. Siz de verilen dikdörtgen ve karelerin alanlarını farklı harfler kullanarak cebirsel olarak gösteriniz.

Örnek:

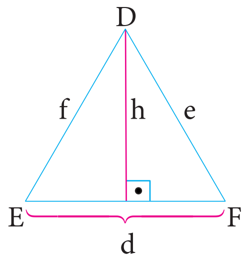
a)



b)



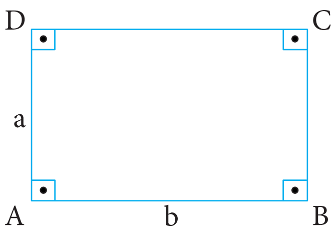
c)



Yukarıda verilen dikdörtgen, kare ve üçgenin alanını ve çevresini cebirsel olarak ifade edelim. Cebirsel ifadenin değişkenlerini, terimlerini, sabit terimini ve terimlerin katsayılarını bulalım.

Çözüm

a)



ABCD dikdörtgen alanı = a · b birimkare

ABCD diktörtgenin çevresi = 2a +2b birimdir.

Cebirsel ifadelerde kullanılan değişkenler a ve b'dir.

a · b cebirsel ifadesi tek terimlidir.

$1 \cdot ab + 0$

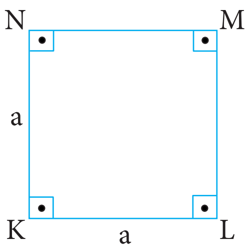
Terimin katsayısı — Sabit Terim

2a + 2b cebirsel ifadesi iki terimlidir.

$2a + 2b + 0$

Terimin katsayısı — Terimin katsayısı — Sabit Terim

b)



KLMN karesinin alanı $= a \cdot a = a^2$ birim kare

KLMN karesinin çevresi = 4a birim olur.

Cebirsel ifadelerde kullanılan değişkenler a'dır.

a^2 cebirsel ifadesi tek terimlidir.

$1 \cdot a^2 + 0$

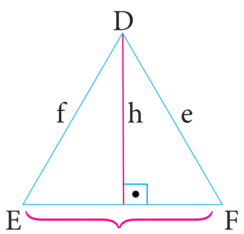
Terimin katsayısı — Sabit Terim

4a cebirsel ifadesi tek terimlidir.

$4a + 0$

Terimin katsayısı — Sabit Terim

c)



DEF üçgeninin alanı $= \dfrac{h \cdot d}{2}$ birimkare

DEF üçgenin çevresi = d + e + f birim olur.

$\dfrac{h \cdot d}{2}$ cebirsel ifadesi tek terimlidir ve kullanılan değişkenler h ve d'dir.

$\dfrac{1}{2} \cdot h \cdot d + 0$

Terimin katsayısı — Sabit Terim

d + e + f cebirsel ifadesi üç terimlidir ve kullanılan değişkenler d, e ve f'dir.

$1d + 1e + 1f + 0$

Terimin katsayısı — Terimin katsayısı — Terimin katsayısı — Sabit Terim

BİLGİ KUTUSU

İçinde en az bir bilinmeyen bulunan ifadelere **cebirsel ifadeler** denir. Cebirsel ifadelerde kullanılan a , b, c, x, y ve z gibi harflere **değişken** (bilinmeyen) denir. Cebirsel ifadede bir sayı ile değişkenin veya birden fazla değişkenin çarpımına **terim** denir. Cebirsel ifadede toplam ya da fark durumunda olan her ifade bir terim belirtir. Sadece sayıdan oluşan terimlere **sabit terim** denir. Cebirsel ifadede bilinmeyenin yanında bulunan sayıya işareti ile beraber bilinmeyenin **katsayısı** denir.

Örnek:

$3x^2$ cebirsel ifadesini farklı biçimlerde yazalım.

Çözüm

$3x^2$ cebirsel ifadesini aşağıdaki gibi

$3x^2 = x^2 + x^2 + x^2$,

$3x^2 = 3 . x^2$,

$3x^2 = x . 3x$,

$3x^2 = \frac{6}{2} \cdot x^2$

farklı biçimlerde yazabiliriz.

Örnek:

$12x^2 y$ cebirsel ifadesine özdeş cebirsel ifadeler yazalım.

Çözüm

$12x^2y = 2x \cdot 6xy$

$12x^2y = 12 \cdot x \cdot x \cdot y$

$12x^2y = 6x^2y + 6x^2y$

$12x^2y = 4x^2y + 4x^2y + 4x^2y$

$12x^2y = x^2 \cdot 12y$ cebirsel ifadesini farklı biçimlerde yazabiliriz.

Örnek:

Bir sayının 3 katının 4 eksiğini gösteren cebirsel ifadeyi yazalım.

Çözüm

Bilinmeyen sayıya x diyelim.

x'in 3 katı $\Rightarrow 3x$

x'in 3 katının 4 eksiği $\Rightarrow 3x - 4$ olur.

Buna göre

$3x - 4$ cebirsel ifadesindeki terimler $3x$ ve -4'tür. $3x$ teriminin katsayısı 3'tür. $3x - 4$ ifadesinin sabit terimi ise -4'tür. Sabit terimin katsayısı -4'tür.

BİLGİ KUTUSU

Sabit terim bir katsayıdır.

Örnek:

Bir sayının 5 eksiğinin 2 katını gösteren cebirsel ifadeyi yazalım.

Çözüm

Bilinmeyen sayıya x diyelim.

x'in 5 eksiği $\Rightarrow x-5$

x'in 5 eksiğinin 2 katı $\Rightarrow 2 \cdot (x-5)$ olur.

$$\begin{aligned} 2(x-5) &= 2 \cdot x + 2 \cdot (-5) \\ &= 2x + (-10) \\ &= 2x - 10 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$2x - 10$ ifadesinin terimleri $2x$ ve -10'dur. $2x$ terimin katsayısı 2, -10 terimin (sabit terim) katsayısı -10'dur.

Örnek:

Aşağıdaki tabloda sözel ifadelerin cebirsel gösterimleri verilmiştir. İnceleyiniz.

Bir sayının yarısının 5 eksiği	$\frac{x}{2}-5$
Bir sayının 3 katı ile 2 katının çarpımı	$3x \cdot 2x$
Bir sayının 4 fazlasının üçte biri	$\frac{1}{3} \cdot (x+4)$
Bir sayının karesi	x^2
Bir sayının 2 katı ile karesinin toplamı	$2x + x^2$
Bir sayının karesinin –5 katı	$-5x^2$

Örnek:

$3x - 4x + 9x - 3y + y$ ifadesinin en sade hâlini ve kaç terimli olduğunu yazalım.

Çözüm

Verilen ifadede benzer terimler arasında toplama ve çıkarma işlemleri yapalım.

"3x", "– 4x" ile "9x" ifadeleri benzer terimler olduklarından

$3x - 4x + 9x = (3 - 4 + 9)x$

"–3y" ve "y" ifadeleri benzer terimler olduklarından

$-3y + y = (-3 + 1)y$

$= -2y \qquad \Rightarrow 8x - 2y$ ifadesi iki terimlidir.

BİLGİ KUTUSU

Değişkenleri ve aynı değişkenlerin kuvvetleri eşit olan terimlere **benzer terim** denir. Benzer terimler kendi arasında ortak çarpan parantezine alınarak toplama ve çıkarma işlemleri yapılır.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıdaki cebirsel ifadelerin değişkenlerini bulunuz.

Cebirsel ifade	Değişkenler
$2x - 5$	
$5x - 3y$	
$4x^2 + 2x$	
$x - 3y + 5z$	

2- Aşağıdaki cebirsel ifadelerin terimlerini bulunuz.

Cebirsel ifade	Terimler
$8 - 5x$	
$3x^2$	
$2e + 3f - d$	
$x^2 - 4y^2 + a$	

3- Aşağıdaki cebirsel ifadelerin en sade hâlini bulunuz.

Cebirsel ifade	Terimler
$4x - y + 5y + 2x$	
$x - 2x + 3x + y - 3y$	
$4a - 2b - a$	
$2c - 4m - 4c + 2m$	

4- Aşağıdaki cebirsel ifadelerin sabit terimini bulunuz.

Cebirsel ifade	Terimler
$3x^2 - 2x + 3$	
$5x$	
$2x - 3y^2 + 2$	
$2ab^2$	

5- $4x^2 - 5x - 3y + 8$ ifadesinde katsayılar toplamı kaçtır?

Cebirsel İfadelerle Çarpma İşlemi

Ayşe hanım, yemek masasına örtü almak istiyor. Yemek masasının uzun kenarı kısa kenarının 2 katından 10 cm daha fazla olduğuna göre masanın alanını veren cebirsel ifadeyi nasıl yazabilirsiniz? Düşünüz.

Örnek:

5 ile (2x −3) ifadesinin çarpımını cebirsel olarak yazalım.

Çözüm

Çözümü çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanarak yapalım.

$5 \cdot (2x - 3) = 5 \cdot (2x) + 5 \cdot (-3) = 10x + (-15) = 10x - 15$ olur.

Örnek:

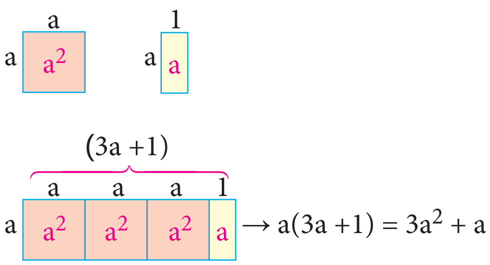
a ile (3a +1) ifadelerinin çarpımını cebirsel olarak gösterelim.

Çözüm

1. Yol. Çarpma işlemin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanalım.

$a\,(3a + 1) = a \cdot 3a + a \cdot 1 = 3a^2 + a$

2. Yol. Çarpma işlemini cebir karolarıyla modelleyelim.



Örnek:

xy ile $(3x - 4)$ ifadelerinin çarpımını cebirsel olarak gösterelim.

Çözüm

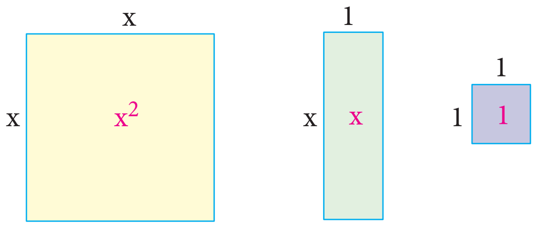
$xy(3x - 4) = xy(3x) + xy(-4) = 3x^2 - 4xy$ olur.

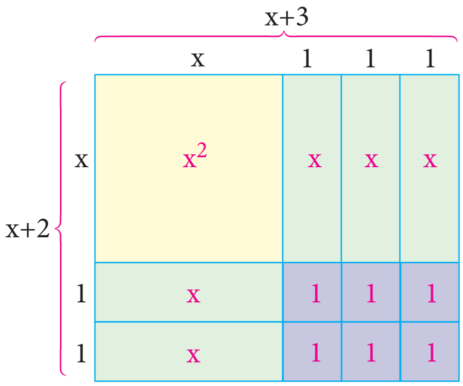
Örnek:

$x+2$ ve $x+3$ ifadelerinin çarpımını cebirsel ifade olarak yazalım.

Çözüm

Çarpma işlemini cebir karolarıyla modelleyelim.





Dikdörtgenin alanı

$$(x + 2) \cdot (x + 3) = x \cdot x + x \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \cdot 3$$
$$= x^2 + \underbrace{3x + 2x} + 6$$
$$= x^2 + 5x + 6 \text{ olur.}$$

BİLGİ KUTUSU

Cebirsel ifadelerde çarpma işlemi yapılırken katsayılar kendi aralarında çarpılır ve katsayı olarak yazılır. Aynı değişkenler çarpılırken kuvvetleri toplanır, farklı değişkenler çarpılırken çarpım olarak yazılır. Benzer terimli olanlar ise toplama veya çıkarma işlemleri yapılarak düzenlenir.

Örnek:

Hayırsever bir işadamı bir okulda okuyan a – 4 tane öğrencinin her birine 3a +2 TL burs vermektedir. Buna göre işadamının verdiği toplam burs miktarı kaç lira olur? Bulalım.

Çözüm

Öğrenci Sayısı $= a - 4$

Burs Miktarı $= 3a + 2$

İşadamının verdiği burs miktarı : $(a - 4) \cdot (3a + 2)$

$$= a \cdot (3a) + a \cdot 2 - 4 \cdot (3a) - 4 \cdot 2$$

$$= 3a^2 + \underbrace{2a - 12a} - 8$$

$= 3a^2 - 10a - 8$ TL olur.

Cebirsel İfadeleri Çarpanlara Ayırma

Yandaki resmi inceleyiniz. İki kardeşin kütlelelerini cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz? Düşününüz.

Örnek:

$12x + 12y$ cebirsel ifadesini çarpanlara ayıralım.

Çözüm

12 sayısı her iki terimde de ortaktır. Buna göre verilen ifadeyi 12 ortak çarpan parantezine alırız.

$12x + 12y = 12(x + y)$ olur.

Örnek:

Aşağıdaki cebirsel ifadeleri çarpanlara ayıralım.

a) $9a + 9b$ **b)** $3x^2 + 2x$

Çözüm

a) $9a + 9b$ ifadesinde 9 sayısı her iki terimde de ortaktır. O hâlde
$9a + 9b = \mathbf{9}(a + b)$ olur.

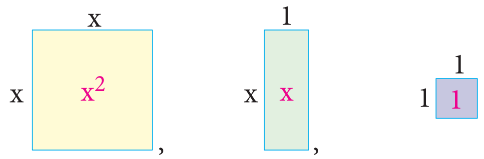
b) $3x^2 + 2x$ ifadesinde ortak çarpan "**x**" tir. Buna göre
$3x^2 + 2x = \mathbf{x}(3x + 2)$ olur.

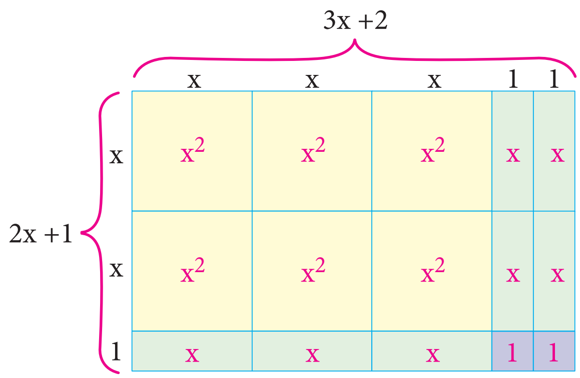
Örnek:

$(2x + 1) \cdot (3x + 2)$ işlemini yapalım.

Çözüm

Çarpma işlemini cebir karolarıyla modelleyelim.





Dikdörtgenin alanı

$(2x + 1) \cdot (3x + 2) = 6x^2 + 7x + 2$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıda verilen ifadelerin çarpımını cebirsel ifade olarak yazınız.

a) $4(5 - 3a)$

b) $(a+2)\ (2a + 1)$

c) $2b(4a + 1)$

ç) $(5-2a)\ (3a - 1)$

2- Aşağıda verilen ifadelerin çarpımını cebir karolarını kullanarak modelleyiniz.

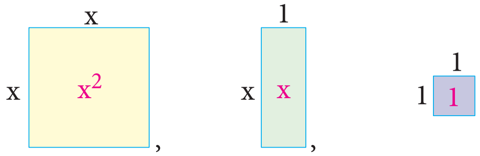
a) $(a + 1) \cdot (a + 2)$

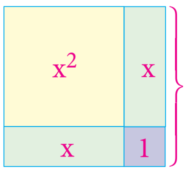
b) $(2a + 1) \cdot (a + 1)$

c) $3a \cdot (a + 5)$

ç) $(4a + 2) \cdot (3a + 5)$

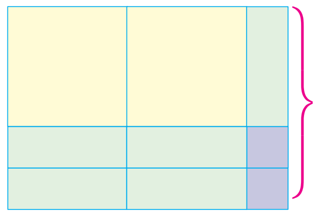
3- **Aşağıdaki örneği inceleyiniz. Cebir karoları ile modellenen çarpma işlemlerini yazınız.**

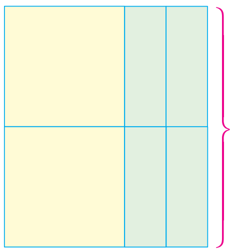


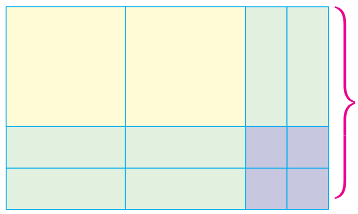


$x^2 + \underbrace{x + x}_{} + 1$

$x^2 + 2x + 1$







Örnek:

$25^2 - 5^2$ ifadesini çarpanlara ayıralım.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
25^2 - 5^2 &= \underbrace{(25 - 5)}_{} \cdot \underbrace{(25 + 5)}_{} \text{ (İki kare farkını kullandık)} \\
&= \quad 20 \quad \cdot \quad 30 \\
&= 600
\end{aligned}
$$

Örnek:

$y^2 + 12y + 36$ cebirsel ifadesini çarpanlara ayıralım.

Çözüm

$y^2 + 12y + 36$ ifadesinde birinci (y^2) ve üçüncü (36) terimlerin kareköklerinin 2 katı ortadaki ($12y$) terime eşittir. Bu tür ifadeler tam kare cebirsel ifadelerdir.

Buna göre

$y^2 + 12y + 36 = (y + 6) \cdot (y + 6) = (y + 6)^2$ olur.

$y \quad 2 \cdot y \cdot 6 \quad 6$

Örnek:

$4x^2 - 28x + 49$ cebirsel ifadesini çarpanlara ayıralım.

Çözüm

$4x^2 - 28x + 49$ ifadesinde birinci ($4x^2$) ve üçüncü (49) terimlerin kareköklerinin 2 katı ortadaki ($-28x$) terimine eşittir. Bu tür ifadeler tam kare cebirsel ifadelerdir.

Buna göre

$4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7) \cdot (2x - 7) = (2x - 7)^2$ olur.

$2x \quad (-7)$

$2 \cdot 2x \,.\, (-7)$

Örnek:

$25x^2 + 60xy + 36y^2$ cebirsel ifadesini çarpanlara ayıralım.

Çözüm

$\underbrace{25x^2}_{5x} + 60xy + \underbrace{36y^2}_{6y} = (5x + 6y) \cdot (5x + 6y) = (5x + 6y)^2$ olur.

$2 \,.\, 5x \,.\, 6y$

Örnek:

Aşağıdaki tam kare cebirsel ifadeleri çarpanlara ayıralım.

a) $25a^2 - 40ab + 16b^2$

b) $64x^2 - 48xy + 9y^2$

Çözüm

a) $\underbrace{25\,a^2}_{5a} - 40\,ab + \underbrace{16b^2}_{(-4b)} = (5a - 4) \cdot (5a - 4) = (5a - 4)^2$

$2 \cdot 5a\,(-4b)$

b) $\underbrace{64\,x^2}_{8x} - 48\,x\,y + \underbrace{9y^2}_{(-3y)} = (8x - 3y) \cdot (8x - 3y) = (8x - 3y^2)$

$2 \cdot 8x\,(-3y)$

Örnek:

$x + y = 9$ ve $x \cdot y = 36$ ise $x^2 + y^2$ değeri kaçtır? Bulalım.

Çözüm

$x^2 + y^2$ değerini bulmak için tam kare ifadelerden yararlanalım.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(x + y)^2} &= 9^2 \\
x^2 + \underbrace{2xy} + y^2 &= 81 \\
x^2 + 2 \cdot 36 + y^2 &= 81 \\
x^2 + y^2 &= 81 - 72 \\
x^2 + y^2 &= 9 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

BİLGİ KUTUSU

$a^2 \mp 2ab + b^2$ şeklindeki cebirsel ifadelere **tam kare cebirsel ifadeler** denir. Tam kare cebirsel ifadelerde birinci ve üçüncü terimlerin kareköklerinin 2 katı, ortadaki terime eşittir. Tam kare ifadenin ortasındaki terim pozitif ise diğer terimlerin ikisi de pozitiftir. Tam kare ifadenin ortasındaki terim negatif ise diğer terimlerin biri pozitif diğeri negatiftir.

ALIŞTIRMALAR

1- **Aşağıdaki cebirsel ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak çarpanlara ayırınız.**

a) $14 + 14d$

b) $4x^2 + 3x$

c) $12x^3 + 16x^2 + 4x$

ç) $11a^3 - 9a^2 + 5a$

2- **Aşağıdaki ifadeleri iki kare farkını kullanarak çarpanlara ayırınız.**

a) $a^2 - 9$

b) $c^2 - 100$

c) $y^2 - 121$

ç) $x^2 - 625$

3- **Aşağıdaki tam kare cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırınız.**

a) $b^2 + 10b + 25$

b) $y^2 + 16y + 64$

c) $9x^2 + 54x + 81$

ç) $4a^2 - 20ab + 25b$

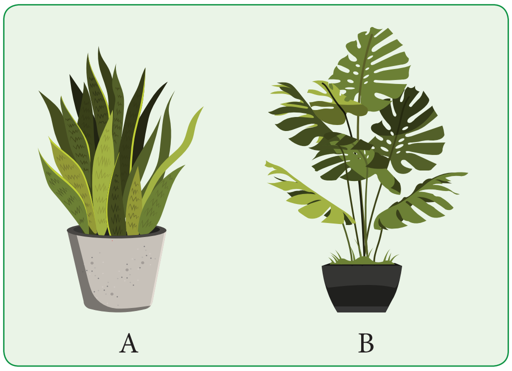
d) $36x^2 - 36xy + 9y^2$

e) $16n^2 - 32mn + 16m^2$

4- $x + y = 13$ ve $x \cdot y = 36$ ise $x^2 + y^2$ **değerini tam kare ifadelerden yararlanarak bulunuz.**

Özdeşlikler

Şekildeki A bitkisinin boyu her yıl x + 2 cm B bitkisinin boyu x – 2 cm uzamaktadır. A ve B bitkilerinin x + 2 yıl sonraki boylarını gösteren cebirsel ifadeyi nasıl yazarsınız? Düşününüz.



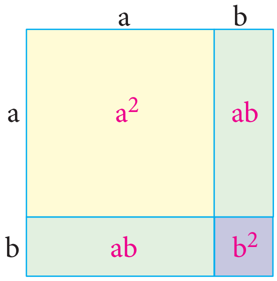
Örnek:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

eşitliğinin bir özdeşlik olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

Cebir karolarını kullanarak bir kenar uzunluğ a + b olan karenin alanını bulalım.



$$\begin{aligned}(a + b) \cdot (a + b) &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{olur.}\end{aligned}$$

a ve b'nin alacağı her değer için $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ eşitliği doğrudur. Dolayısıyla $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ eşitliği bir özdeşliktir.

Örnek:

$(x – y)^2 = x^2 – 2xy + y^2$ eşitliğinin bir özdeşlik olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

$$\begin{aligned}(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y) &= x \cdot x + x \cdot (-y) - y \cdot x - y \cdot (-y) \\ &= x^2 - xy - xy + y^2 \\ &= x^2 - 2xy + y^2 \text{ olur}\end{aligned}$$

x ve y'nin alacağı her değer için $(x – y)^2 = x^2 – 2xy + y^2$ eşitliği doğru olduğundan özdeşliktir.

BİLGİ KUTUSU

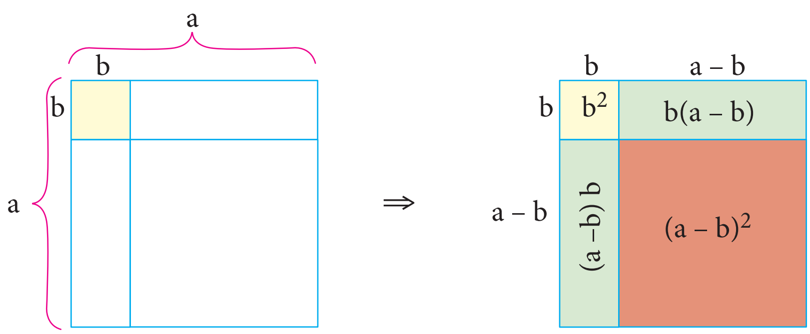
Değişkenin aldığı her değer için doğru çıkan eşitliklere **özdeşlik** denir. Denklemler bazı gerçek sayıları için doğru iken özdeşlikler bütün gerçek sayılar için doğrudur.

Örnek:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ eşitliğinin bir özdeşlik olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

1. Yol: Bir kenar uzunluğu a br olan karenin içine bir kenar uzunluğu b br olan kare çizelim.



$$a^2 = b^2 + b(a-b) + (a-b)\,b + (a-b)^2$$
$$a^2 = \cancel{b^2} + ab - \cancel{b^2} + ab - b^2 + (a-b)^2$$
$$a^2 = 2ab - b^2 + (a-b)^2$$
$$a^2 - 2ab = b^2 + (a-b)^2$$
$$a^2 - 2ab - b^2 = (a-b)^2$$

2. Yol: Çarpma işlemi yapalım.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a\cdot a + a\cdot(-b) - b\cdot a - b\cdot(-b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

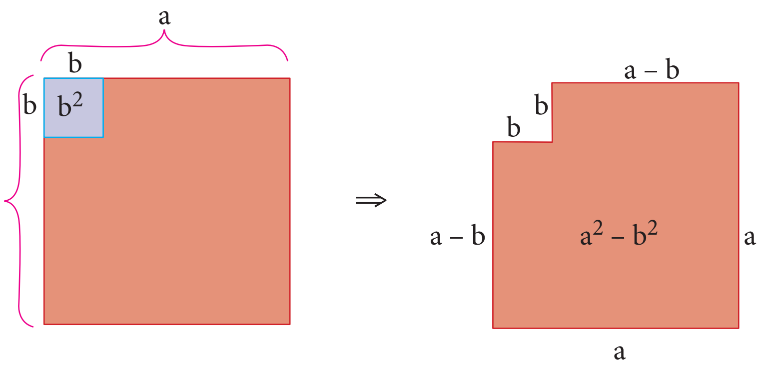
a ve b'nin alacağı her değer için $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ eşitliği doğru olduğundan bu ifade özdeşliktir.

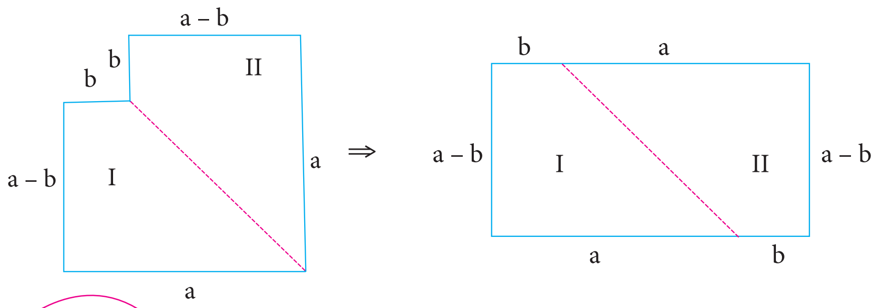
Örnek:

$a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$ eşitliğinin özdeşlik olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

Bir kenar uzunluğu a br olan karenin içinden bir kenar uzunluğu b br olan kareyi kesip çıkaralım.





Kenar uzunlukları $a - b$ ve $a + b$ olan dikdörtgen elde edilir.

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2$$

$$= a^2 - b^2 \text{ şeklinde bulunur.}$$

a ve b'nin alacağı her değer için $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$ eşitliği doğru olduğundan bu ifade özdeşliktir.

BİLGİ KUTUSU

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliğine **iki terimin toplamının karesi özdeşliği** denir. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ özdeşliğine **iki terimin farkının karesi özdeşliği** denir. $a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$ özdeşliğine **iki kare farkı özdeşliği** denir.

Örnek:

Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini özdeşliklerden yararlanarak bulalım.

a) $(2y + x)^2$ **b)** $(3a - 4b)^2$ **c)** $(a - 3b)^2$ **d)** $(4x + 1)^2$

Çözüm

a) $(2y + x)^2 = (2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot x + x^2$

$= 4y^2 + 4xy + x^2$

b) $(3a - 4b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4b + (-4b)^2$

$= 9a^2 - 24ab + 16b^2$

c) $(a - 3b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 3b + (-3b)^2$

$= a^2 - 6ab + 9b^2$

d) $(4x + 1)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2$

$= 16x^2 + 8x + 1$

Örnek:

Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini özdeşliklerden yararlanarak bulalım.

a) $(2x - 3y) \cdot (2x + 3y)$ **b)** $(1 - 4a) \cdot (4a + 1)$

Çözüm

a) İki kare farkı, özdeşliğinden yararlanalım.

$(2x - 3y) \cdot (2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2$

$= 4x^2 - 9y^2$

b) İki kare farkı özdeşliğinden yararlanalım.

$(1 - 4a) \cdot (1 + 4a) = 1^2 - (4a)^2$

$= 1 - 16a^2$

Örnek:

$a = 2019$ ve $b = 2018$ için $a^2 - 2ab + b^2$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

İki terimin farkının karesi özdeşliğinden yararlanalım.

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \\ &= (2019 - 2018)^2 \\ &= 1^2 \\ &= 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek:

$a = 51$ ve $b = 34$ için $4a^2 - 9b^2$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

İki kare farkı özdeşliğinden yararlanalım.

$$\begin{aligned} 4a^2 - 9b^2 &= (2a)^2 - (3b)^2 \\ &= (2a - 3b) \cdot (2a + 3b) \\ &= (2 \cdot 51 - 3 \cdot 34) \cdot (2 \cdot 51 + 3 \cdot 34) \\ &= \underbrace{(102 - 102)}_{0} \cdot (2 \cdot 51 + 3 \cdot 34) \\ &= 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek:

Aşağıdaki eşitliklerin özdeşlik olup olmadığını bulalım.

a) $(x + 2) \cdot (2x - 1) = 2x^2 + 3x - 2$

b) $(1 + 3x) \cdot (4x - 2) = 12x^2 + 2x - 2$

Çözüm

a)

$$\begin{aligned} (x + 2)\,(2x - 1) &= x \cdot 2x + x\,.\,(-1) + 2\,.\,(2x) + 2 \cdot (-1) \\ &= 2x^2 - x + 4x - 2 \\ &= 2x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

$(x + 2)\,(2x - 1) = 2x^2 + 3x - 2$ eşitliği bilinmeyenlerin her değeri için sağlanacağından özdeşliktir.

b) $(1 + 3x)\,(4x - 2) = 1 \cdot 4x + 1 \cdot (-2) + 3x \cdot 4x + 3x \cdot (-2)$

$= 4x - 2 + 12x^2 - 6x$

$= 12x^2 - 2x - 2$ olur.

$(1+3x)(4x - 2) = 12x^2 - 2x - 2$ eşitliği sadece $x = 0$ için sağlanır. Bilinmeyenlerin her değeri için sağlanmadığından özdeşlik değildir.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıdaki eşitliklerin özdeşlik olup olmadığını bulunuz.

a) $x(4 - 2x) = 4x - 2x^2$

b) $(x + 3)\,(y + 1) = xy + x + 3y + 3$

c) $(2x + 1)\,(x + 2) = 2x^2 - 2x + 2$

d) $(x - 2)\,(3x + 1) = 3x^2 - 5x + 2$

2- Aşağıdaki cebirsel ifadelerin ait olduğu özdeşlik türünü işaretleyiniz.

	İki Terimin Toplamının Karesi	İki Terimin Farkının Karesi	İki Kare Farkı
$(2x - 3y)^2$			
$9x^2 - y^2$			
$a^2 + 2ab + b^2$			
$(2 - 5x)\,(2 + 5x)$			
$4x^2 + 4xy + y^2$			

3- $a = 4142$ ve $b = 4140$ için $a^2 - 2ab + b^2$ ifadesinin değerini bulunuz.

4- Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini özdeşliklerden yararlanarak bulunuz.

a) $(4 - x)\,(4 + x)$

b) $(5x - 2y)\,(5x + 2y)$

c) $(xy - 4)^2$

d) $(2a + b^2)^2$

ÖZET

- Olayların gelişimi ile ilgili yeni bilgi edinmek için yapılan deneme ve testlere deney denir. Bir deneyin sonuçlarının her birine çıktı denir. Bir deneyde gerçekleşmesini istediğimiz durumlara olay denir. Bir deneyin bütün çıktılarının oluşturduğu durumlara olası durumlar (örnek uzay) denir. Bir olayın gerçekleşme ihtimalinin matematiksel değerine o olayın olasılığı denir.

- Bir olaydaki her bir çıktının olasılığı birbirine eşit ise bu olaya eş olasılıklı olay denir. n olası durum içerisinden her bir çıktının olma olasılığı $\frac{1}{n}$ 'dir.

- Olasılık bir olayın olma şansına (olabilirliğine) ilişkin bir ölçümdür.

- Bir olayın olma olasılığı 0(sıfır) ile 1 arasındadır. Gerçekleşmesi mümkün olmayan olaylara imkansız olay denir ve gerçekleşme olasılığı “0” dır. Gerçekleşmesi kesin olan olaylara kesin olay denir ve gerçekleşme olasılığı “1” dir.

- Bir olayın olma olasılığı ile olmama olasılığı toplamı “1” dir.

- İçinde en az bir bilinmeyen bulunan ifadelere cebirsel ifadeler denir. Cebirsel ifadelerde kullanılan a, b, c, x, y ve z gibi harflere değişken (bilinmeyen) denir. Cebirsel ifadelerde bir sayı ile değişkenin veya birden fazla değişkenin çarpımına terim denir. Cebirsel ifadede toplam ya da fark durumunda olan her ifade bir terim belirtir. Sadece sayıdan oluşan terimlere sabit terim denir. Cebirsel ifadede bilinmeyenin yanında bulunan sayıya işareti ile beraber bilinmeyenin katsayısı denir. Sabit terim bir katsayıdır. Değişkenleri ve aynı değişkenlerin kuvvetleri eşit olan terimlere benzer terim denir. Benzer terimler kendi arasında ortak çarpan parantezine alınarak toplama ve çıkarma işlemleri yapılır.

- Cebirsel ifadelerde çarpma işlemi yapılırken katsayılar kendi aralarında çarpılır katsayı olarak yazılır. Aynı değişkenler çarpılırken kuvvetleri toplanır, farklı değişkenler çarpılırken çarpım olarak yazılır. Benzer terimler ise toplama veya çıkarma işlemleri yapılarak düzenlenir.

- İki veya daha fazla terimden oluşan bir cebirsel ifadedeki ortak çarpan olan terim veya sayı, çarpan olarak parantezin dışına yazılır. Ortak çarpan, parantez dışına yazılırken çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğinden yararlanılır.

- $a^2 \mp 2ab + b^2$ şeklindeki cebirsel ifadelere tam kare cebirsel ifadeler denir. Tam kare cebirsel ifadelerde birinci ve üçüncü terimlerin kareköklerinin 2 katı, ortadaki terime eşittir. Tam kare ifadenin ortasındaki terim pozitif ise diğer terimlerin ikisi de pozitiftir. Tam kare ifadenin ortasındaki terim negatif ise diğer terimlerin biri pozitif diğeri negatiftir.

- Değişkenin aldığı her değer için doğru çıkan eşitliklere özdeşlik denir. Denklemler bazı gerçek sayılar için doğru iken özdeşlikler bütün gerçek sayılar için doğrudur.

  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliğine iki terim toplamının karesi özdeşliği denir.

  $(a – b)^2 = a^2 –2ab + b^2$ özdeşliğine iki terim farkının karesi özdeşliği denir.

  $(a – b)^2 = (a – b) \cdot (a + b)$ özdeşliğne iki kare farkı özdeşliği denir.

3. ÜNİTE
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. **Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?**

A) Olasılığı 1 olan olaylara kesin olay denir.

B) İmkansız olay gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{2}$ olan olaylardır.

C) Bir olayın olma olasılığı 0 ile 1 arasındadır.

D) Bir olaydaki n tane çıktının olasılığı birbirine eşit ise bir çıktının olasılığı $\frac{1}{n}$'dir.

2. Bir gruptaki 12 kız öğrencinin 4'ü, 18 erkek öğrencinin 6'sı gözlüklüdür.

Buna göre aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

I. Gruptan seçilen bir öğrencinin kız olma olasılığı erkek olma olasılığına göre daha azdır.

II. Gruptan seçilen bir öğrencinin gözlüklü olma olasılığı gözlüklü erkek olma olasılığından daha fazladır.

III. Gruptan seçilen bir öğrencinin gözlüklü kız olma olasılığı gözlüklü erkek öğrenci olma olasılığına eşittir.

A) I - II

B) I - III

C) II - III

D) I - II - III

3. I. Zarın üstü yüzüne 2 den büyük sayı gelmesi

II. Zarın üst yüzüne çift sayı gelmesi

III. Zarın üst yüzüne asal sayı gelmesi

IV. Zarın üst yüzüne sıfır gelmesi

Bir zarın havaya atılması deneyinde yukarıdaki olaylardan hangilerinin olasılıkları birbirine eşittir.

A) I - II - IV

B) I - III

C) II - III

D) I - II - III

4. Bir torbada özdeş 4 kırmızı, 2 mavi ve 3 sarı top bulunmaktadır.

Torbadan rastgele seçilen bir top ile ilgili aşağıdaki bilgilerden hangisi yanlıştır?

A) Kırmızı topun gelmeme olasılığı $\frac{5}{9}$'dur.

B) Siyah topun gelme olasılığı imkansız olaydır.

C) Sarı topun gelmeme olasılığı $\frac{1}{3}$'tür.

D) Beyaz topun olmama olasılığı kesin olaydır.

5. $xy^2 - 3x + 5$

cebirsel ifadesinin sabit terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) –3
B) –1
C) 1
D) 5

6. $(x + y) \cdot (x - y)$

işleminin cebirsel gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - y^2$
B) $(x + y)$
C) $x - y$
D) $x^2 + y^2$

7. $(4 - 3x)^2$

özdeşliğinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $9x^2 - 24x - 16$
B) $9x^2 - 24x + 16$
C) $9x^2 - 12x + 4$
D) $9x^2 + 12x - 4$

8. $(4 - x) \cdot (4 - x)$

özdeşliğinin eşiti hangi seçenekte doğru verilmiştir?

A) $16 - x^2$
B) $16 + x^2$
C) $16 - 8x + x^2$
D) $16 + 8x - x^2$

HAYAT BOYU ÖĞRENME

9. Aşağıdaki seçeneklerden hangisi özdeşliktir?

A) $a^2 + a = 4 - a$
B) $a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1)$
C) $a - 5 = 5 - a$
D) $(a - 1)^2 = a^2 - 2a - 1$

10. $x^2 + y^2 = 57$ ve $x - y = 7$

olduğuna göre $x \cdot y$ değeri kaçtır?

A) 8
B) 7
C) 5
D) 4

4. ÜNİTE
DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

ÜNİTE KONULARI

- DOĞRUSAL DENKLEMLER
- EŞİTSİZLİKLER

4. ÜNİTE

• DOĞRUSAL DENKLEMLER
• EŞİTSİZLİKLER

NELER ÖĞRENECEĞİZ ?

Bu ünitenin birinci bölümününde;

- Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözmeyi,
- Koordinat sistemini özellikleriyle tanımayı ve sıralı ikilileri göstermeyi,
- Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişikenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade etmeyi,
- Doğrusal denklemin grafiğini çizmeyi,
- Doğrusal ilişki içeren gerçek hayat durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturup yorumlamayı,
- Doğrunun eğimini modellerle açıklamayı, doğrusal denklemleri ve grafiklerini eğimle ilişkilendirmeyi öğreneceğiz.

Bu ünitenin ikinci bölümününde;

- Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren günlük hayat durumlarına uygun matematik cümleleri yazmayı,
- Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri sayı doğrusunda göstermeyi,
- Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözmeyi öğreneceğiz.

ANAHTAR KAVRAMLAR

- Bağımlı değişken
- Doğrusal denklem
- Büyük veya eşit
- Eşitsizlik
- Bağımsız değişken
- Eğim
- Küçük veya eşit

DOĞRUSAL DENKLEMLER

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

İslam dünyasının cebir alanındaki en önemli matematik bilgini 780 - 847 yılları arasında yaşamış olan Hârizmî olduğu söylenebilir. Batı'nın ve dolayısıyla bugünkü matematiğin kullandığı sayılar Hârizmî'nin sekizinci yüzyılda kullandıklarının bir çeşit uyarlamasıdır.

Golenişev Papirüsü

Eski Mısır'dan günümüze ulaşan iki önemli matematik yapıtı. Golenişev Papirüsü (MÖ 1900) ile Rhind Papirüsü'dür (MÖ 2000 - 1000). Eski Mısır'da vergiler ürün miktarı ile orantılı şekilde alınmakta, binalar inşa edilirken belli orantılara bağlı olarak yapılmaktaydı. Her yıl Nil Nehri'nin taşması sonucu sınırları karışan tarlalar matematikten yararlanarak tekrar belirleniyordu. Mısır papirüslerinde yer alan problemlerden birkaçı aşağıdaki gibidir.

Rhind Papirüsü

“Bir miktar ve miktarın yedide birinin toplamı 19 olduğuna göre, bu miktarın büyüklüğü nedir?

“Düşünün ki 450 hektarlık arpaya sahipsiniz ve her 10 hektarın 1 hektarını vergi olarak vermek zorunda olduğunuza göre, bu üründen kaç hektarlık vergi verirsiniz? Düşününüz.

Örnek

Aşağıda verilen denklemlerde bilinmeyenleri bulalım.

a) $2x - 8 = 4$ **b)** $3 + 2x = x - 7$

c) $5 - 3x = 2x - 10$ **d)** $3(x + 1) - 2 = 13$

Çözüm

a)
$$2x - 8 = 4$$
$$2x - 8 + 8 = 4 + 8$$
(Eşitliğin her iki tarafına 8 ekledik)
$$2x = 12$$
$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{2}x = \cancel{12} \cdot \frac{1}{2}$$
(Eşitliğin her iki tarafını 2'ye böldük.)
$$x = 6 \text{ olur.}$$

b)
$$3 + 2x = x - 7$$
$$3 + 2 - x = x - x - 7$$
$$3 + x = -7$$
$$3 + x - 3 = -7 - 3$$
$$x = -10 \text{ olur.}$$

c)
$$5 - 3x = 2x - 10$$
$$5 - 3x - 2x = 2x - 2x - 10$$
(Eşitliğin her iki tarafından 2x çıkardık.)
$$5 - 5x = -10$$
$$5 - 5 - 5x = -10 - 5$$
(Eşitliğin her iki tarafını −5'e böldük.)
$$-5x = -15$$
$$\frac{-5x}{-5} = \frac{-15}{-5}$$
$$x = 3 \text{ olur.}$$

ç)
$$3(x + 1) - 2 = 13$$
$$3x + 3 - 2 = 13$$
$$3x + 1 = 13$$
$$3x + 1 - 1 = 13 - 1$$
$$3x = 12$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x = 4 \text{ olur.}$$

BİLGİ KUTUSU

a, b gerçek sayı, $a \neq 0$ ve x değişken olmak üzere $ax + b = 0$ ifadesine **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir. Denklemi çözmek (bilinmeyeni bulmak) için eşitliğin her iki tarafına aynı sayı eklenir veya çıkarılır, eşitliğin her iki tarafı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılır veya bölünür.

Örnek

$\frac{2x}{3} = 4$ denkleminde bilinmeyeni bulalım.

Çözüm

1. Yol

$$\frac{2x}{3} = 4$$

$$3 \cdot \frac{2x}{3} = 4 \cdot 3$$ (Eşitliğin her iki tarafını 3 ile çarpalım.)

$$2x = 12$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$ (Eşitliğin her iki tarafını 2'ye bölelim.)

$x = 6$ olur.

2. Yol

İçler dışlar çarpımı yapalım.

$$\frac{2x}{3} = 4$$

$$\frac{2x}{3} \times \frac{4}{1}$$

$$2x \cdot 1 = 3 \cdot 4$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$ (Eşitliğin her iki tarafını 2'ye bölelim.)

$x = 6$ olur.

Örnek

Aşağıdaki verilen denklemlerde bilinmeyenleri bulalım.

a) $\frac{2x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

b) $2 - \frac{x}{4} = -3$

c) $\frac{x+1}{3} = 4$

ç) $\frac{4-2x}{3} - 1 = 1$

Çözüm

a) Paydayı eşitleyelim.

$$\underset{(2)}{\frac{2x}{3}} + \underset{(3)}{\frac{1}{2}} = \underset{(1)}{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{4x}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{4x+3}{\cancel{6}} = \frac{1}{\cancel{6}}$$ (Sadeleştirme yapalım.)

$$4x + 3 = 1$$

$$4x = 1 - 3$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{-2}{4}$$

$x = \frac{-1}{2}$ olur.

b) $2 - \frac{x}{4} = -3$

$$-\frac{x}{4} = -3-2$$

$$-\frac{x}{4} = -5$$

$$-\frac{x}{4} \times \frac{-5}{1}$$ (İçler dışlar çarpımı yapalım.)

$$-x = 4.(-5)$$

$$-x = -20$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{-20}{-1}$$

$x = 20$ olur.

c) İçler dışlar çarpımı yapalım.

$$\frac{x+1}{3} \times \frac{4}{1}$$

$x + 1 = 12$

$x = 12 - 1$

$x = 11$ olur.

ç) $\frac{4-2x}{3} - 1 = 1$

$\frac{4-2x}{3} = 1 + 1$ (İçler dışlar çarpımı yapalım.)

$$\frac{4-2x}{3} \times \frac{2}{1}$$

$4 - 2x = 6$

$-2x = 6 - 4$

$\frac{-2x}{-2} = \frac{2}{-2}$

$x = -1$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıda verilen denklemlerdeki bilinmeyenleri bulunuz.

a) $5 + 7x = 2x$

b) $2x + 3x = 4 - x$

c) $\frac{x}{2} - 1 = 2$

ç) $\frac{5x}{2} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

2- Aşağıda verilen denklemlerdeki bilinmeyenleri bulunuz.

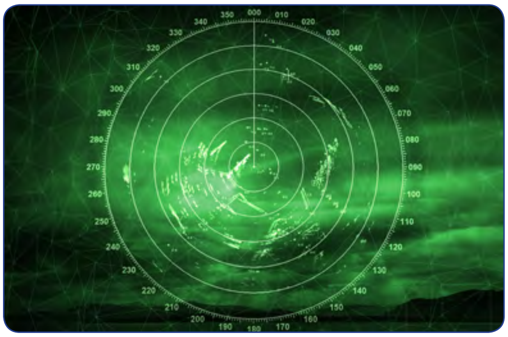
a) $4\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3$

b) $2 - \frac{3x}{4} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ç) $\frac{4}{3}\left(2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

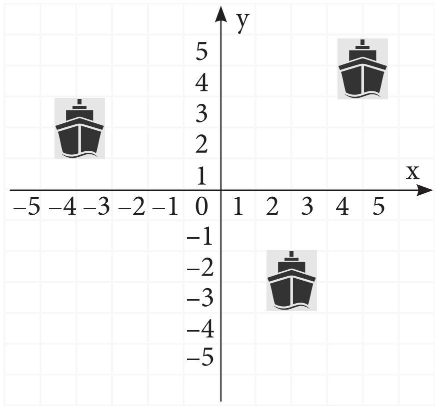
Koordinat Sistemi



Yeryüzünde bir noktanın bulunduğu yeri koordinat sisteminde gösterebiliriz. Nokta, sistemin başlangıç noktasından geçen düzlemlere olan uzaklığı ile gösterilir. Koordinat sistemini belirten cihazlara radar örnek verilebilir.

Radar; hava trafik kontrolü ve uçuş yöntemi, denizlerde gemi trafiği, navigasyon, hava durumu radarı ve arama kurtarma alanlarında kullanılır.

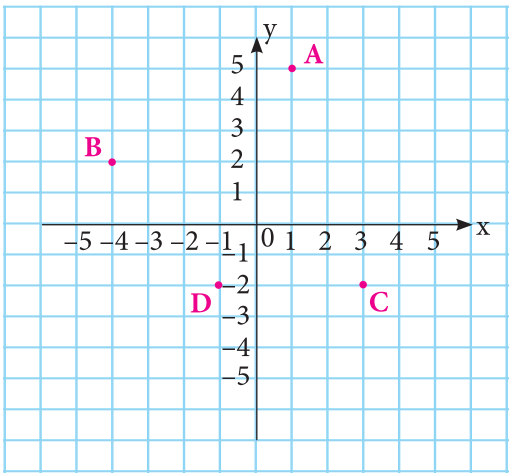
Yandaki koordinat sistemine yerleştirilen üç geminin koordinatlarının nasıl belirleneceğini düşününüz.



Örnek

A(1, 5), B(−4,2), C(3,−2), D(−1, −2) noktalarını koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm



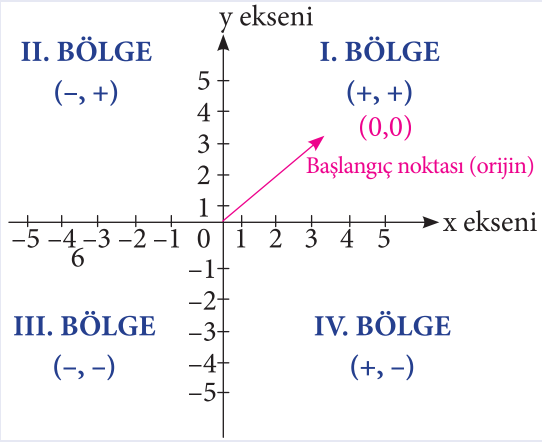
A(1,5) noktasının koordinat sisteminde yerini belirlemek için başlangıç noktasından 1 birim sağa, 5 birim yukarı gittik. A noktasını yerini belirledik.

B(−4,2) noktasının koordinat sisteminde yerini belirlemek için başlangıç noktasından 4 birim sola, 2 birim yukarı gittik. B noktasının yerini belirledik.

C(3,−2) noktasının koordinat sisteminde yerini belirlemek için başlangıç noktasından 3 birim sağa, 2 birim aşağı gittik. C noktasının yerini belirledik.

D(−1,−2) noktasının koordinat sisteminde yerini belirlemek için başlangıç noktasından 1 birim sola, 2 birim aşağıya gittik. D noktasının koordinat sistemindeki yerini belirledik.

BİLGİ KUTUSU



İki sayı doğrusunun 0 (sıfır) noktasında dik kesişmesiyle oluşan sisteme **koordinat sistemi** denir. Yatay sayı doğrusuna **x ekseni**, dikey sayı doğrusuna **y ekseni** denir. Eksenlerin kesim noktasına **başlangıçı noktası** veya **orijin** denir. Koordinat sisteminde bir noktanın yeri A(a, b) şeklinde belirtilir. Sırasıyla a ve b sayılarının oluşturduğu sayı ikilisine **sıralı ikili** denir.

Sıralı ikiliden birincisi x ekseninden, ikincisi y ekseninden seçilir.

Eksenler kordinat sistemini dört bölgeye ayırır.

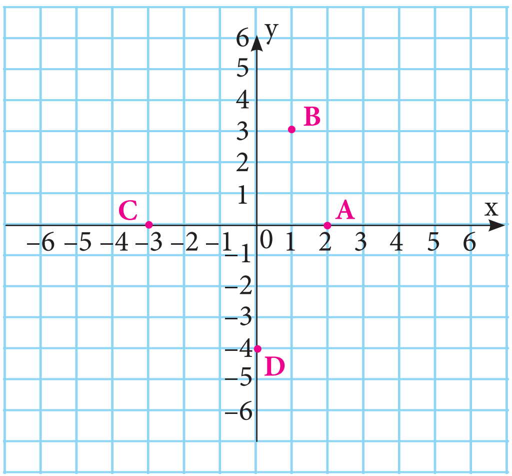
1. bölgedeki noktalardan sıralı ikililer (+, +),

2. bölgedeki noktalardan sıralı ikililer (–, +),

3. bölgedeki noktalardan sıralı ikililer (–, –)

4. bölgedeki noktalardan sıralı ikililer (+, –) şeklindedir.

Örnek



Yandaki koordinat sistemi üzerinde verilen noktaların koordinatlarını belirleyelim. Noktaların eksenlere olan uzaklıklarını bulalım.

Çözüm

Noktaların koordinatlarını belirlerken sıralı ikilinin 1. terimini x ekseninden, 2. terimini y ekseninden seçelim.

A noktasının koordinatları: (2, 0)

x eksenine olan uzaklığı 0 birim, y eksenine olan uzaklığı 2 birimdir.

B noktasının koordinatları : (1,3)

x eksenine olan uzaklığı 3 birim, y eksenine olan uzaklığı 1 birimdir.

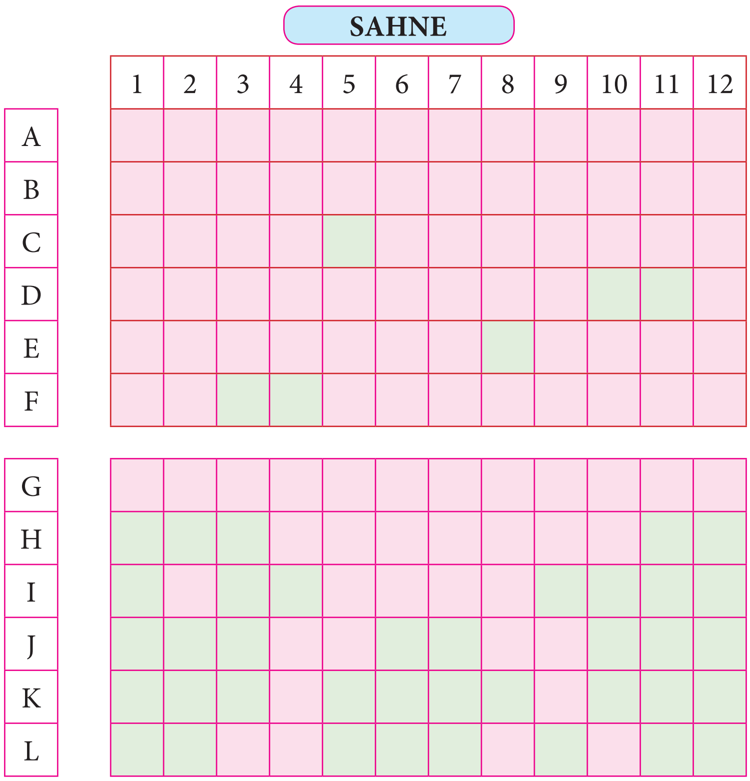
C noktasının koordinatları: (–3,0)

x eksenine olan uzaklığı 0 birim, y eksenine olan uzaklığı 3 birimdir.

D noktasının koordiatları : (0, 4)

x eksenine olan uzaklığı 4 birim, y eksenine olan uzaklığı 0 birimdir.

Örnek



Tiyatro oyunu için Ece, kendisine ve üç arkadaşına bilet almak istiyor. Kırmızı kutucuklar dolu, yeşil kucuklar boş olan koltukları göstermektedir. Buna göre

a) Dört arkadaş yan yana oturmak istediklerinde hangi koltukları seçebileceğini,

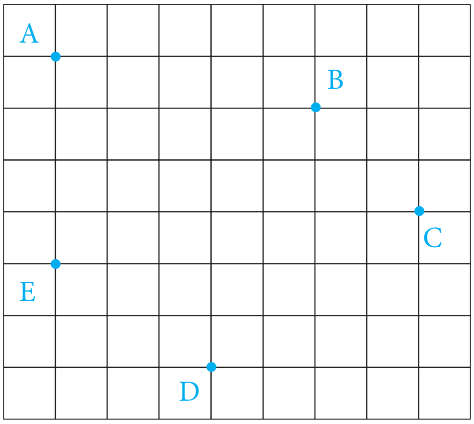
b) İkişerli gruplar hâlinde sahneye daha yakın oturmak istediklerinde hangi koltukları seçebileceğini bulalım.

Çözüm

a) Dört arkadaşın yan yana oturabilecekleri koltuklar: I - 9, I - 10, I - 11, I - 12 ya da K - 5, K - 6, K - 7, K - 8’dir.

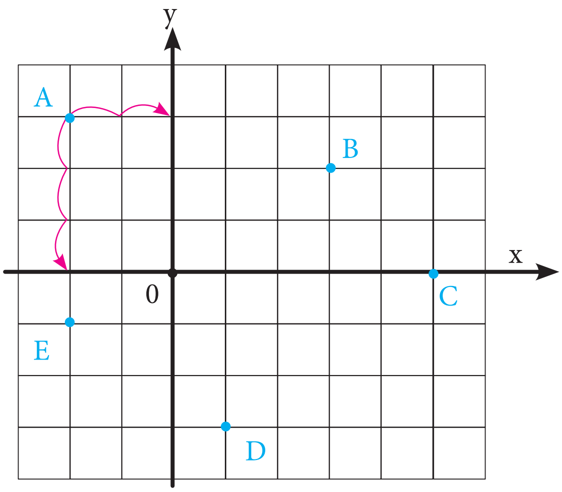
b) Sahneye yakın bölümde ikişerli gruplar hâlinde oturabilecekleri koltuklar: D - 10, D - 11, F - 3 ve F - 4’tür.

Örnek



Yandaki şekil eş karelere bölümüştür. A noktasının koordinatları (–2, 3) ise B, C, D ve E noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm



A noktasının koordinatları (–2, 3) olduğundan II. bölgede ve x eksenine olan uzaklığı 2 br, y eksenine olan uzaklığı 3 br’dir.

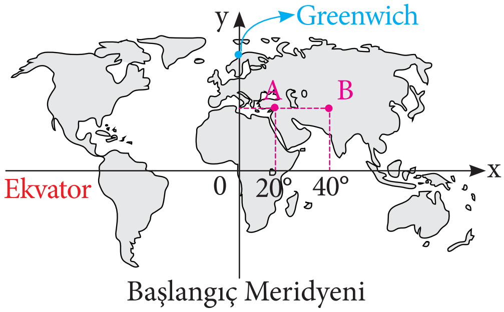
Bu bilgiler doğrultusunda x ve y eksenini belirleyip, kesişim noktalarını orijin olarak kabul edelim.

Koordinat ekseninde diğer noktaların koordinatları:

B(3,2), C(5,0), D(1,–3) ve E(–2, –1)

şeklindedir.

Örnek



Yandaki Dünya haritası üzerinde A ve B ülkelerinin koordinatları verilmiştir. A ülkesi 20 doğu boylamı, B ülkesi 40 doğu boylamında yer almaktadır. Her boylam arasında 4 dk fark olduğuna göre A ve B ülkeleri arasındaki saat farkını bulalım.

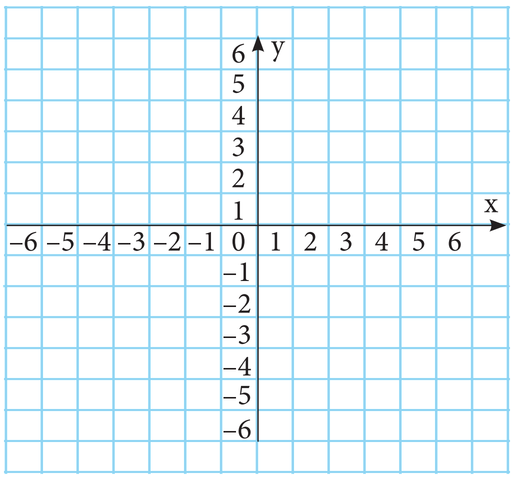
Çözüm

A ve B ülkeleri arasındaki boylam farkı 40 - 20 = 20'dir. Her boylam arasında 4 dk fark olduğuna göre A ve B ülkeleri arasındaki saat farkı

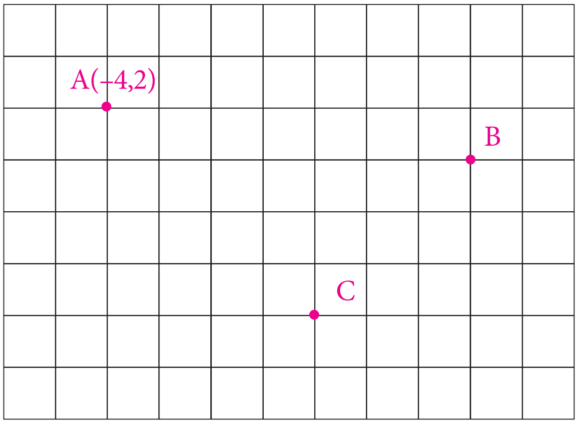
$20 \cdot 4 = 80 = 60$ dk $+ 20$ dk $= 1$ sa 20 dk'dır.

ALIŞTIRMALAR

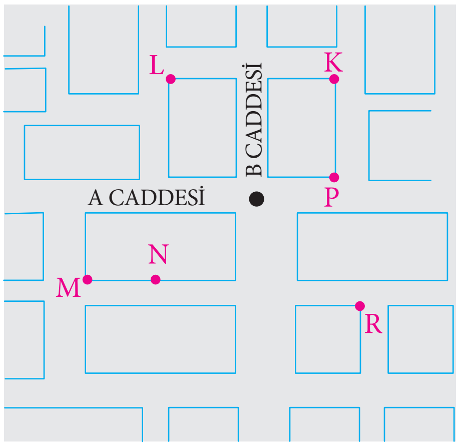
1-



A(–4,2), B(0,3), C(–1,–5), D(7,0) **sıralı ikililerine karşılık gelen noktaları bulunuz. Koordinat sistemine yerleştiriniz.**

2- 

Yandaki kareli kâğıtta verilen A noktasının koordinatı (–4,2) ise B ve C noktalarının koordinatlarını bulunuz.

3- 

Yandaki yerleşim yeri planında verilen noktaların koordinatları; K(5,10), L(–5,a) M(–10, –5), N(–8, b), P(c, 0), R(d, –8) şeklindedir.

a + b + c + d toplamını bulunuz.

4- A(–4, 5), B(2,1), C(4, –7), D(0,3)

noktalarına göre aşağıda verilen ifadelerin yanına doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazınız.

A noktasının y eksenine uzaklığı 4 birimdir.	(…)
B noktasının x eksenine uzaklığı 2 birimdir.	(…)
C noktasının x eksenine uzaklığı –7 birimdir.	(…)
D noktası x ekseni üzerindedir.	(…)

Doğrusal İlişkiler

Saatte 120 km hızla giden bir aracın deposundaki yakıtın zamana bağlı değişiminin nasıl olacağını düşününüz.

Örnek

Tablo: Süreye Bağlı Depoda Kalan Yakıt

Süre(saat)	0	1	2	3	4
Depoda kalan yakıt(lt)	60	55	50	45	40

Yukarıdaki tabloda harekete başlayan bir aracın hareket süresi ile deposunda kalan yakıt arasındaki doğrusal ilişki gösterilmiştir.

Verilen tabloya göre uygun grafiği ve denklemi oluşturalım.

Çözüm

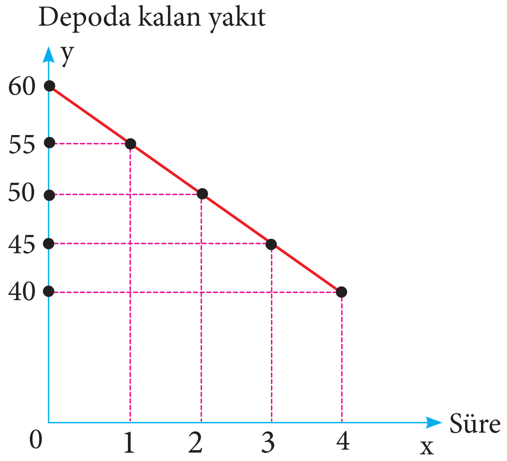
Süreyi x ile depoda kalan yakıtı y ile gösterelim.

Süre(saat)	**Depoda Kalan Yakıt**	**İlişki**	**Sıralı İkili**
0 →	60 →	$60 - 0 \cdot 5$ →	(0,60)
1 →	55 →	$60 - 1 \cdot 5$ →	(1,55)
2 →	50 →	$60 - 2 \cdot 5$ →	(2,50)
3 →	45 →	$60 - 3 \cdot 5$ →	(3,45)
4 →	40 →	$60 - 4 \cdot 5$ →	(4,40)

Depoda en başta 60 lt yakıt olduğuna ve her saat 5 lt yakıt harcandığına göre denklemi $y = 60 - 5x$ şeklinde olur.

Tablodaki verilerle grafiği çizelim.

Grafik: Süreye Bağlı Depoda Kalan Yakıt



x değişkenine bağlı olarak y değerlerinin değiştiğine dikkat edelim! İki değişken arasındaki ilişkinin grafiği doğru şeklinde olduğundan bu değişkenler arasında doğrusal ilişki vardır.

BİLGİ KUTUSU

x ve y değişken, a, b ve c gerçek sayı $a \neq 0$ veya $b \neq 0$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ biçimindeki denklemlere **doğrusal denklem** denir. x değişkeninin aldığı değerlere bağlı olarak y değişkeni farklı değerler alır. Doğrusal denklemlerde x değişkenine **bağımsız değişken**, y değişkene ise **bağımlı değişken** denir.

Örnek

Tablo: Güne Bağlı Okunan Toplam Sayfa Sayısı

Gün	Sayfa Sayısı
1	50
2	100
3	150
4	200
5	250
6	300
7	350

Yandaki tabloda günde 50 sayfa kitap okuyan bir kişinin bir hafta boyunca toplam okuduğu sayfa sayıları verilmiştir. Tabloyu inceleyerek uygun grafiği ve denklemi oluşturalım.

Çözüm

Tabloda da görüldüğü gibi gün sayısı arttıkça toplamda okunan sayfa sayısı da artmaktadır. Günü x ile sayfa sayısını da y ile gösterelim. Okunan sayfa sayısı ve geçen gün sayısı arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade edelim.

1. günün sonunda : $1 \cdot 50 = 50$ sayfa

2. günün sonunda : $2 \cdot 50 = 100$ sayfa

⋮ ⋮

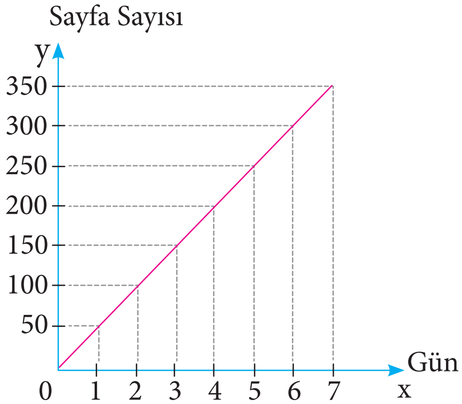
7. günün sonunda : $7 \cdot 50 = 350$ sayfa okunur.

Sayfa Sayısı = Gün x 50 ⇒ y = 50 x

Oluşan sayfa sayısı (y) güne (x) bağlı olduğundan x bağımsız değişken, y ise bağımlı değişkendir.

Tablodaki verilerle grafiği çizelim.

Grafik: Güne Bağlı Okunan Toplam Sayfa sayısı



İki değişken arasındaki ilişkinin grafiği doğru şeklinde olduğundan bu değişkenler arasında doğrusal ilişki vardır.

Örnek

Yarısına kadar su dolu olan havuza her saat 40 L su ilave edilerek 5 saatte dolduruyor. Verilen bilgilere uygun denklemi ve grafiği oluşturalım.

Çözüm

Tablo: Geçen Zamanla Havuzda Biriken Su Miktarı Arasındaki İlişki

Geçen Süre (Saat)	Biriken Su Miktarı	İlişki	Sıralı İkili
1	40	1 . 40	(1,40)
2	80	2 . 40	(2,80)
3	120	3 . 40	(3,20)
4	160	4 . 40	(4,160)
5	200	5 . 40	(5,200)

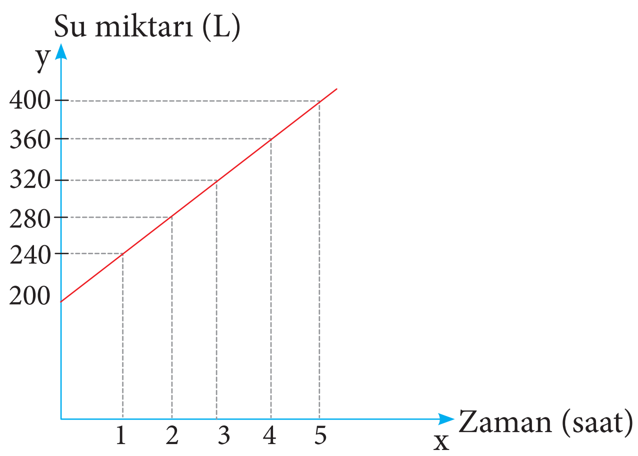
Tabloda havuzda biriken su miktarını y ile, geçen zamanı (saat) x ile gösterelim. x değişkenine bağlı olarak y değişmektedir. Yani havuzda biriken su miktarı geçen zamana göre artmaktadır. Buna göre x bağımsız değişkendir. y bağımlı değişkendir.

Yarısı boş olan havuzda 5 saatte 5 · 40 = 200 L su birikmiştir. Dolayısıyla ilk etapta havuzun dolu olan kısmı da 200 L'dir. Geçen zaman ile havuzda biriken su miktarı arasındaki ilişkiyi cebirsel ifade ile gösterelim.

Başlangıçta (0. saatin sonunda) havuzdaki su miktarı: 200 L
1. saatin sonunda havuzdaki su miktarı: 200 + 1 · 40 = 240 L
2. saatin sonunda havuzdaki su miktarı: 200 + 2 · 40 = 280 L
⋮ ⋮
5. saatin sonunda havuzdaki su miktarı: 200 + 5 · 40 = 400 L
Havuzda biriken su miktarı = 200 + (saat · 40)

$$y = 200 + 40x$$

Grafik: Geçen Zamana Bağlı Havuzdaki Su miktarı



ALIŞTIRMALAR

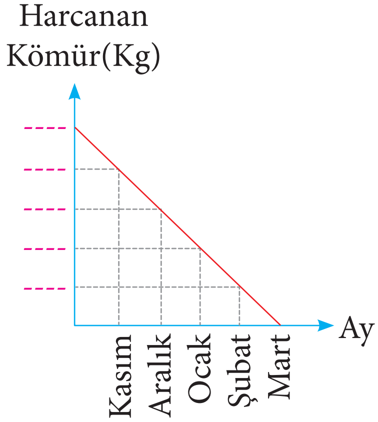
1- Ali Bey evine kalorifer yakıtı için 2000 kg kömür alıyor. Kasım ayından itiaren her ay 400 kg kömür yakarak mart ayının sonunda kömürü bitiyor.

Buna göre aşağıda verilen boşlukları doldurarak grafiği tamamlayınız.

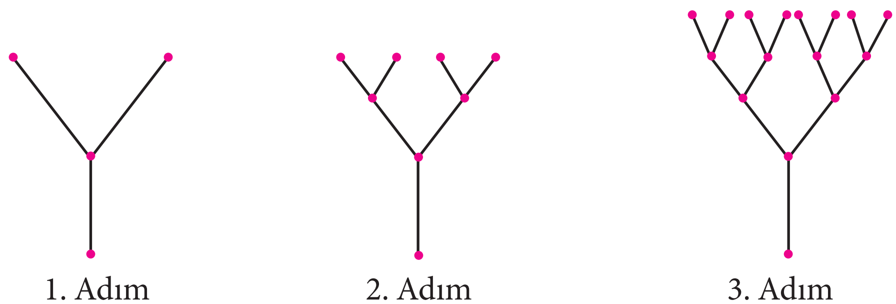
Tablo: Geçen Süre ile Harcanan Kömür Arasındaki İlişki

Geçen Süre (Ay)	Harcanan Kömür (Kg)	İlişki	Sıralı İkili
0	0	2000 - 0.400	(0,2000)
1	400	2000 - 1.400	(1,1600)
2			
3			
4			
5			

Grafik: Aylara Göre Harcanan Kömür Miktarı



2-



Yukarıdaki çubuklar ile bir görüntü oluşturmuştur. Bu örüntüde adım sayısı (x) ile çubuk sayısı (y) arasındaki ilişkiyi veren doğrusal denklemi yazınız. Doğrusal denklemdeki bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirleyiniz.

Doğrusal Denklemlerin Grafiği

Başlangıçtaki boyu 15 cm olan bitki, ayda 2 cm uzamaktadır. Bitkinin dikildiği andan itibaren uzunluğu ile süre arasındaki ilişkinin denklemini yazınız. Bu denklemin doğrusal bir denklem belirtip belirtmediğini düşününüz.

Örnek

$y = x + 1$ doğrusal denkleminin grafiğini çizelim.

Çözüm

$x = 0$, $y = 0$ değerleri için x ve y değerlerini bulalım.

$x = 0$ için $y = 0 + 1$

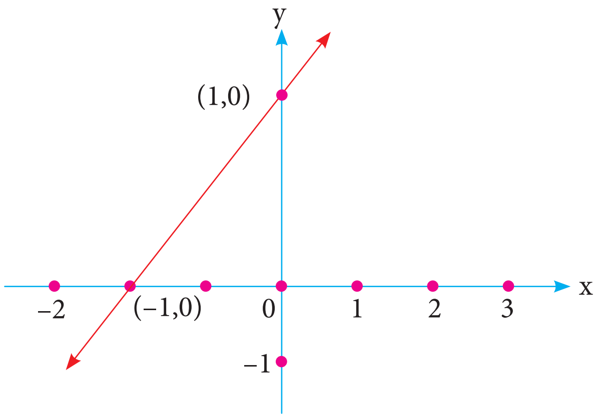
$y = 1$ olur.

$y = 0$ için $0 = x + 1$

$x = -1$ olur.

x		y	Sıralı İkili
0	⇒	1	(0,1)
–1	⇐	0	(–1,0)

Bu değerlere bağlı grafiği çizelim.



$y = x + 1$ denkleminin sabit terimi 1’dir.

Örnek

$y = 2x$ doğrusal denkleminin grafiğini çizelim.

Çözüm

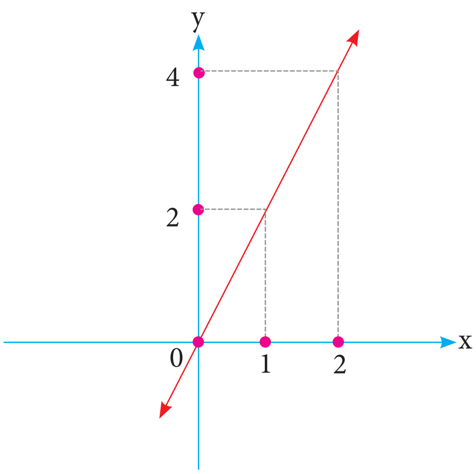
$x = 0$ için $y = 2 \cdot 0 = 0$

$x = 1$ için $y = 2 \cdot 1 = 2$

$x = 2$ için $y = 2 \cdot 2 = 4$ olur.

x	y	Sıralı İkili
0	0	(0,0)
1	2	(1,2)
2	4	(2,4)

Elde ettiğimiz değerlere bağlı grafiğini çizelim.



$y = 2x$ denkleminin sabit terimi 0'dır. Sabit terimi 0 olan doğru denklemleri orijinden geçer.

Örnek

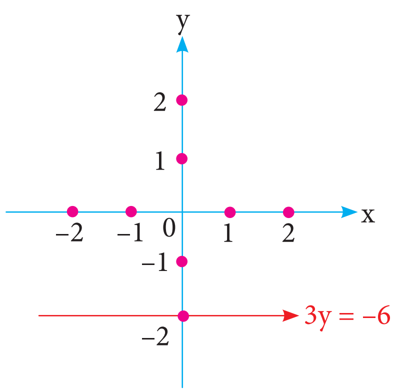
$3y = -6$ doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$$3y = -6$$

$$\frac{\cancel{3}y}{\cancel{3}} = \frac{-6}{3}$$

$y = -2$ bulunur.



$3y = -6$ doğrusu y eksenini -2 noktasında keser ve x eksenine paralel olur.

Örnek

$-2x = -8$ doğrusunun grafiğini çizelim.

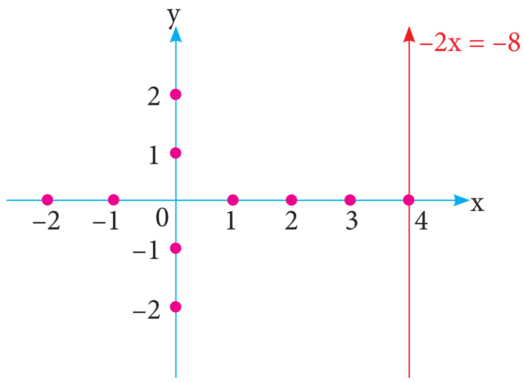
Çözüm

$$-2x = -8$$

$$\frac{-\cancel{2}x}{-\cancel{2}} = \frac{-8}{-2}$$

$x = 4$ bulunur.

$-2x = -8$ doğrusunu x eksenini 4 noktasında keser ve y eksenine paralel olur.



BİLGİ KUTUSU

- a sıfırdan farklı gerçek bir sayı olmak üzere $x = a$ şeklindeki doğrular y eksenine paraleldir.
- a sıfırdan farklı gerçek bir sayı olmak üzere $y = a$ şeklindeki doğrular x eksenine paraleldir.
- a ve b sıfırdan farklı gerçek bir sayı olmak üzere, $ax + by = 0$ şeklindeki sabit terimi 0 olan doğrular orijinden geçer.
- a, b ve c sıfırdan farklı gerçek bir sayı olmak üzere $ax + by + c= 0$ şeklindeki doğrular eksenleri keser. Doğruların eksenleri kestiği noktalar, $x = 0$ ve $y = 0$ değerlerine karşılık gelen noktalardır.

Örnek

$2y - 3x - 12 = 0$ doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$2y - 3x - 12 = 0$ doğrusunun sabit terimi -12 olduğu için doğrunun grafiği orijinden geçmez. Doğrunun eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x = 0$ için $2y - 3 \cdot 0 - 12 = 0$

$$2y - 12 = 0$$

$$\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} = \frac{12}{2}$$

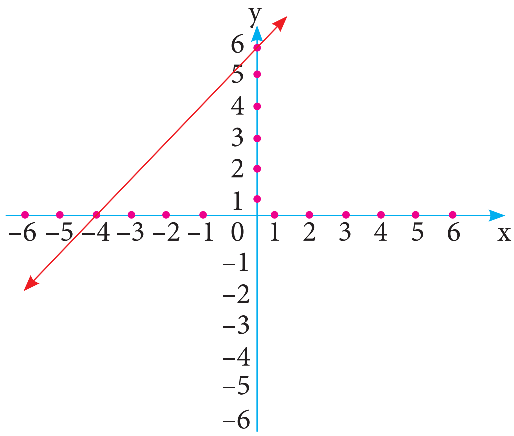
$y = 6$ olur

$y = 0$ için $2 \cdot 0 - 3x - 12 = 0$

$$-3x - 12 = 0$$

$$\frac{\cancel{-3}y}{\cancel{-3}} = \frac{12}{-3}$$

$$x = -4 \text{ olur.}$$



x	y	Sıralı İkili
0	6	(0,6)
–4	0	(–4,0)

Örnek

A(–3, k) noktası 5x +y 10 = 0 doğrusunun üzerinde ise k'nın değerini bulalım.

Çözüm

A(–3,k) noktası 5x +y + 10 = 0 doğrusunun üzerinde olduğuna göre x = –3 ve y = k değerleri için doğru denklemini sağlar.

$$5 \cdot (-3) + k + 10 = 0$$

$$-15 + k + 10 = 0$$

$$k - 5 = 0$$

$$k = 5 \text{ bulunur.}$$

BİLGİ KUTUSU

Koordinat sistemde x = 0 doğrusu y eksenini, y = 0 doğrusu x eksenini belirtir.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıda verilen doğruların grafiklerini koordinat sisteminde çiziniz.

a) $x = 7$ b) $2y = -10$

c) $3x - 2y = 0$ ç) $x - 4y - 12 = 0$

2- $x = 0$, $y = 0$, $x = -3$, $y = -4$ **doğrularının arasında kalan bölgenin kaç birimkare olduğunu bulunuz.**

3- $A(-1, 4)$ noktası $ax - 2y + 5 = 0$ **doğrusu üzerinde olduğuna göre a'nın değerini bulunuz.**

4- Aşağıda verilen doğruların koordinat sisteminde eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

a) $4x + y - 4 = 0$ b) $3y - 15 = x$

c) $4x + 5y = 20$ ç) $y = 8 - 2x$

Doğrusal İlişki İçeren Gerçek Hayat Durumları

Günlük hayatta karşılaştığımız bazı durumları matematiksel olarak ifade ederken tablo, grafik veya denklemleri kullanabiliriz.

Kilo vermeye çalışan bir kişinin geçen zamanla verdiği kilolar arasındaki lişki, arabadaki yakıtın zamana göre değişimi, havalanan bir uçağın zamana göre yerden yüksekliği gibi örnekler bu durumlarda kullanılır.

Örnek

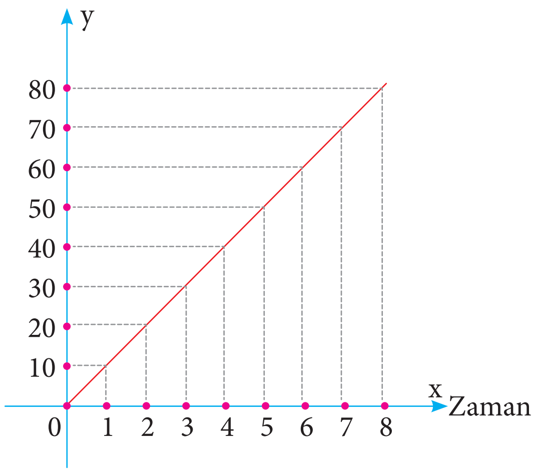
Bir boyacı her saat 10 m^2 alan boyayarak 8 saatte binanın ön yüzünü boyuyor. Binanın boyanan yüzeyinin zamana göre değişimini gösteren tablo ve denklemi oluşturalım. Grafiğini çizip yorumlayalım.

Çözüm

Tablo: Zamana Göre Boyanan Alan

Saat	İlişki	Boyanan Alan
1	1.10	10
2	2.10	20
3	3.10	30
4	4.10	40
5	5.10	50
6	6.10	60
7	7.10	70
8	8.10	80

Grafik: Zamana Göre Boyanan Alan



Yukarıdaki tabloya göre boyanan alan her saat 10 m^2 artıyor. Dolayısıyla saati x değişkeni ile, boyanan alanı y değişkeni ile gösterilem. Doğrusal denklem $y = 10x$ olur.

Grafik orjinden başlar ve x'in değerleri arttıkça y'nin değeride artar.

Örnek

3 kg doğan Aslı bebeğin kilosu, ilk altı ay boyunca her ay 500 gr artıyor. Aslı bebeğin aylara göre kilosundaki değişimi gösteren tablo ve denklemi oluşturalım. Grafiğini çizip yorumlayalım.

Çözüm

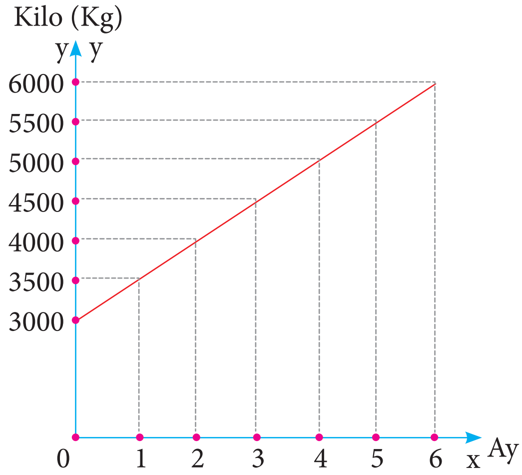
3 kg = 3000 gr dönüşümünü yazalım.

Tablo: Aylara Göre Kilodaki Değişim

Ay	İlişki	Kilo
1	3000 + 1.500	3500
2	3000 + 2.500	4000
3	3000 + 3.500	4500
4	3000 + 4.500	5000
5	3000 + 5.500	5500
6	3000 + 6.500	6000

Yukarıdaki tabloyu incelediğimizde ay(x) ile kilo artışı (y) arasındaki ilişkinin y = 3000 + 500 x olduğunu görüyoruz.

Grafik: Aylara Göre Kilodaki Değişim



Doğrusal denklemin grafiği, bebeğin doğduğu zamanki kilosu 3000’den başlıyor. Bebeğin kilosu aylara göre sabit bir şekilde artış gösterdiği için x eksenini kesmez

Örnek

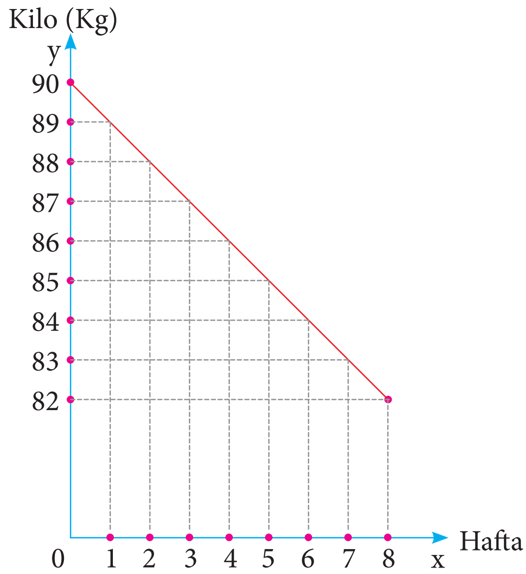
Kilo vermeye çalışan Nuran Hanım bir diyetisyen ile çalışmaya başlar. 90 kg dan her hafta 1 kg vererek sekiz haftanın sonunda 82 kg’a düşer. Nuran Hanım’ın kilosunun haftalar içindeki değişimini tablo ve denklemle gösterelim. Grafiğini çizip yorumlayalım.

Çözüm

Tablo: Haftalar İçindeki Kilo Değişimi

Ay	İlişki	Kilo
1	90 – 1.1	89
2	90 – 1.2	88
3	90 – 1.3	87
4	90 – 1.4	86
5	90 – 1.5	85
6	90 – 1.6	84
7	90 – 1.7	83
8	90 – 1.8	82

Grafik: Haftalar İçindeki Kilo Değişimi



Yukarıdaki tabloyu incelediğimizde kilo kaybının haftala göre değişiminin denklemi y = 90 – x olur. Kilo kaybı ile haftalar arasındaki ilişkinin doğrusal olduğunu görürüz.

Nuran Hanım'ın ilk kilosu 90 kg olduğu için doğrusal denklemin grafiği y eksinini 90 da keser. Her hafta kilo kaybı olduğu için x değerleri arttıkça y değerlerinin azaldığını görürüz.

Örnek

Triatlon (yüzme, bisiklet ve koşu) yarışına katılan Seda yarışın son etabı olan koşuya arkadaşı Hilmi'den 5 km sonra başlamıştır. Seda koşu boyunca Hilmi ile aynı hızda koşarak, 4 saatte koşuyu tamamlamıştır. Bu iki kişinin arasındaki mesafeyle geçen zaman arasındaki ilişkiyi tablo ve denklemle gösterelim. Grafiği çizip yorumlayalım.

Çözüm

Tablo: Seda ile Hilmi Arasındaki Mesafe

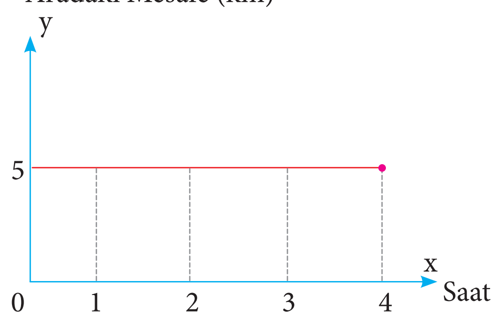
Saat(x)	İlişki	Aradaki Mesafe (y)
1	$5 + v \cdot 1 - v \cdot 1$	5
2	$5 + v \cdot 2 - v \cdot 2$	5
3	$5 + v \cdot 3 - v \cdot 3$	5
4	$5 + v \cdot 4 - v \cdot 4$	5

Seda ve Hilmi'nin hızları aynı olduğu için aralarındaki mesafe hep aynı kalır. Mesafenin zaman göre değişimi

$$y = 5 + v \cdot x - v \cdot x$$

$y = 5$ denklemi ile gösterilir.

Grafik: Seda ile Hilmi Arasındaki Mesafe



Grafik x eksenine paraleldir. Çünkü iki kişi arasındaki mesafe değişmemiştir.

ALIŞTIRMALAR

1- 170 cm uzunluğundaki Sevim Hanım, ileriki yaşlarda kalsiyum eksikliğinden dolayı kemik erimesi hastalığına yakalanıyor.

6 yıl süresince her yıl 1 cm kısalan Sevim Hanım'ın zamana göre boyundaki değişimini tablo ve denklemle gösteriniz. Grafiğini çizerek yorumlayınız.

2- Telefonun şarjı biten Erdem telefonu prize takıyor. Her 10 dakikada telefonun şarjı %5 oranında artıyor.

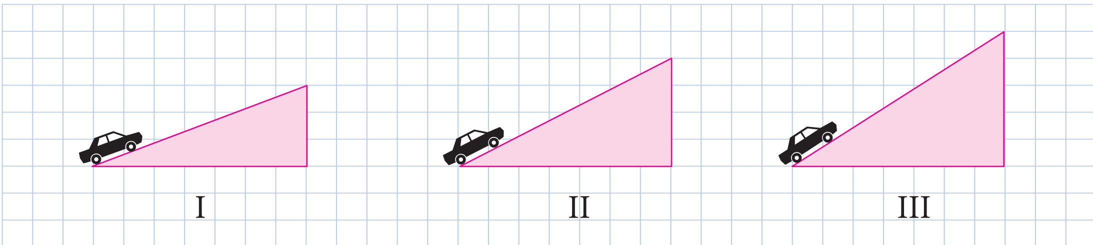
Geçen zamanla telefonun şarjının tamamlanması arasındaki ilişkiyi tablo ve denklemle gösteriniz. Grafiğini çizerek yorumlayınız.

Doğrunun Eğimi

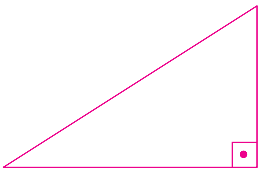
Kara yolları, yollardaki iniş ve çıkışları göstermek amacıyla yandaki trafik tabelalarını kullanır. Trafik tabelası üzerinde yer alan %10 ve %20'nin ne anlama geldiğini düşününüz.

Örnek

Aşağıda bir arabanın çıkacağı farklı yokuşlar verilmiştir. Arabanın hangi yokuşu çıkarken zorlanacağını bulalım.

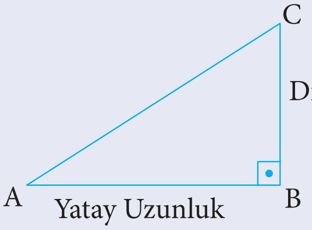


Çözüm



Dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranı arttıkça eğim artar. Her üç şekilde yatay uzunluklar birbirine eşittir. Dikey uzunluk en fazla şekil III'te, en az şekil I'dedir. Dolayısıyla araba en kolay I. yokuşu, en zor III. yokuşu çıkar.

BİLGİ KUTUSU



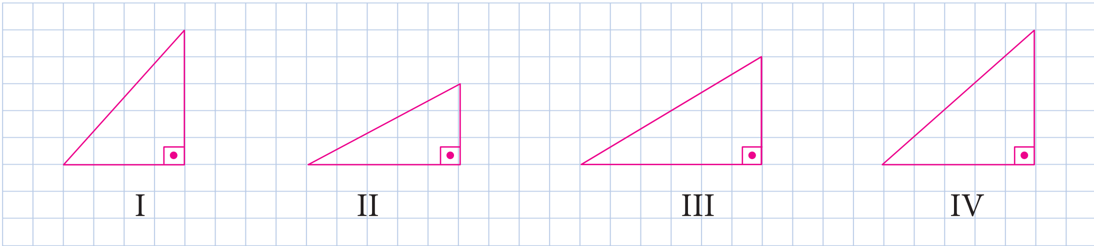
Yandaki şekilde [AC] için dikey uzunluğu yatay uzunluğu oranına **eğim** denir. Eğim "**m**" harfi ile gösterilir.

$$m = \frac{\text{Dikey Uzunluk}}{\text{Yatay Uzunluk}}$$

$$m = \frac{|BC|}{|AB|}$$

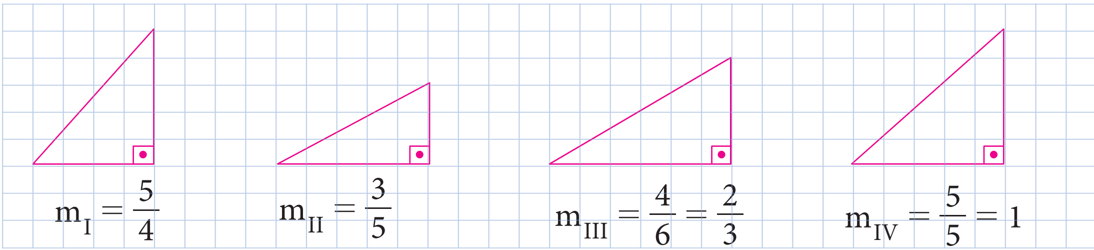
Örnek

Aşağıdaki dik üçgenlerde hipotenüslerin eğimlerini bularak karşılaştıralım.



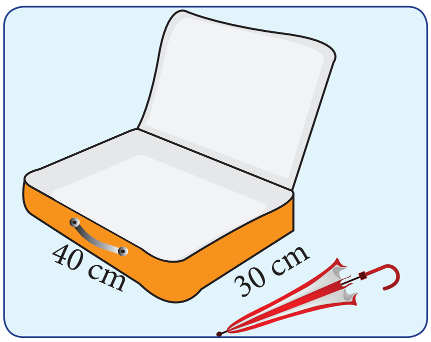
Çözüm

Her üçgen için dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranını bulalım.



Eğimlerin büyükten küçüğe sıralanışı $\frac{5}{4} > 1 > \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ şeklindedir.

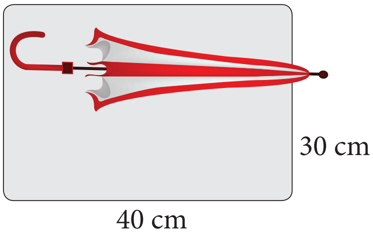
Örnek



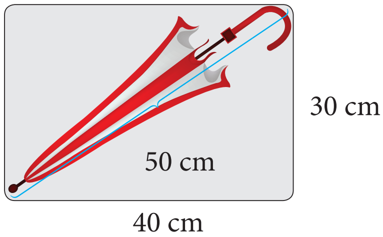
Tabanının uzunlukları 30 cm ve 40 cm olan valizin içine 50 cm uzunluğundaki şemsiyeyi yerleştirmeye çalışalım.

Çözüm

Valizin üstten görünümü aşağıdaki gibidir.



50 cm uzunluğundaki şemsiyenin valize yatay şekilde sığmadığı yukarıda görülmektedir.



Kenar uzunlukları 30 cm ve 40 cm olan dikdörtgenin köşegen uzunluğu 50 cm'dir. Şemsiyenin valize yukarıdaki şekilde sığdığı görülmektedir.

Örnek

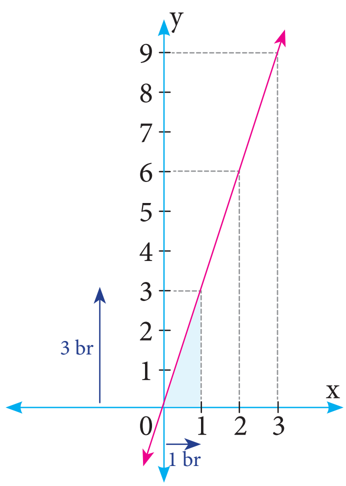
y = 3x doğrusal denkleminin grafiğini çizerek eğimini bulalım.

Çözüm

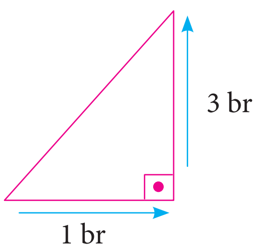
x	y	Sıralı ikili
0	0	(0,0)
1	3	(1,3)
2	6	(2,6)
3	9	(3,9)

+1 +1 +1 +3 +3 +3

x'in artan değerlerine karşılık y'nin aldığı değerler artmaktadır. Tabloya göre y = 3x denkleminin grafiğini çizelim.



Grafiği incelediğimizde yatay eksende sağa doğru 1 br gidildikçe dikey eksende 3 br'lik artış olduğu görülür.



Grafik ile x ekseni arasında kalan dik üçgenlerden birini incelediğimizde dikey uzunluğun yatay uzunluğu oranını $m = \frac{3}{1} = 3$ olur.

y = 3x denkleminde eğimin x'in katsayısına eşit olduğunu görürüz.

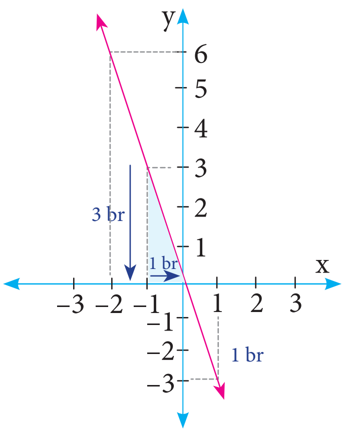
Örnek

y = –3x doğrusal denkleminin grafiğini çizerek eğimini bulalım.

Çözüm

x	y	Sıralı ikili
1	–3	(1,–3)
0	0	(0,0)
–1	3	(–1,3)
–2	6	(–2,6)

x'in artan değerlerine karşılık y'nin aldığı değerler artmaktadır. Tabloya göre y = 3x denkleminin grafiğini çizelim.



Grafiği incelediğimizde yatay eksende sağa doğru 1 br gidildikçe dikey eksende 3 br'lik artış olduğu görülür.

y = –3x denkleminde x'in katsayısı eğime eşit olduğundan grafiğin eğimi m = –3'tür.

Örnek

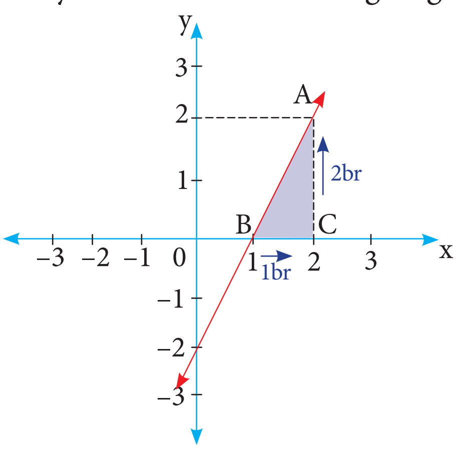
y = 2x –2 doğrusal denkleminin grafiğini çizerek grafiğin eğimini bulalım.

Çözüm

x	y	Sıralı ikili
0	–2	(0,–2)
1	0	(1,0)
2	2	(2,2)

Yandaki tabloyu incelediğimizde x'in değeri 1 artarken y'nin değeri 2 artmaktadır.

y = 2x –2 denkleminin grafiğini çizelim.



Şekildeki ABC dik üçgeninde yatay uzunluk 1 br, dikey uzunluk 2 br'dir. Bu durumda grafiğin eğimi $m = \frac{2}{1} = 2$ olur. y = 2x –2 denkleminin eğimi x'in katsayısına eşittir.

BİLGİ KUTUSU

Koordinat sisteminde bir doğrunun eğimini bulmak için doğrunun denkleminden yararlanılır. m ve n gerçek sayıları için y = mx + n doğrusal denklemin grafiğinin eğimi x'in katsayısı olan m sayısıdır.

Örnek

Aşağıda verilen doğru denklemlerinin eğimlerini bulalım, grafiklerini çizelim.

a) $y = 5 - 2x$ **b)** $y = \frac{5}{4}x + \frac{2}{3}$ **c)** $2y - 3x + 5 = 0$

ç) $x + 4y - 2 = 0$ **d)** $y = 4$ **e)** $x = 2$

Çözüm

a) $y = 5 - 2x$ denkleminde x'in katsayısı –2 olduğundan eğimi –2'dir.

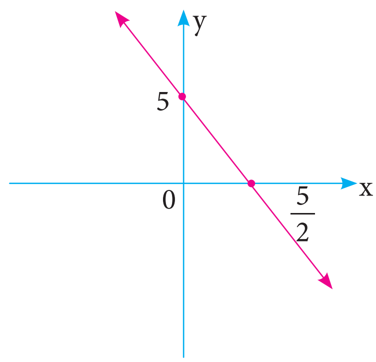
$x = 0$ için $y = 5 - 2 \cdot 0$

$y = 5$

$y = 0$ için $0 = 5 - 2x$

$2x = 5$

$x = \frac{5}{2}$



Doğrunun sola yatık olduğuna dikkat ediniz!

b) $y = \frac{5}{4}x + \frac{2}{3}$ denkleminde x'in katsayısı $\frac{5}{4}$ olduğundan eğimi $\frac{5}{4}$'tür.

$x = 0$ için $y = \frac{5}{4} \cdot 0 + \frac{2}{3}$

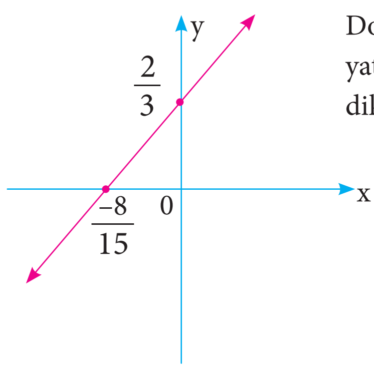
$y = +\frac{2}{3}$

$y = 0$ için $0 = \frac{5}{4}x + \frac{2}{3}$

$-\frac{5}{4}x = \frac{2}{3}$

$\frac{-\cancel{15}x}{-\cancel{15}} = \frac{8}{-15}$

$x = \frac{-8}{15}$



Doğrunun sağa yatık olduğuna dikkat ediniz!

c) $2y - 3x + 5 = 0$ denklemini $y = mx + n$ şeklinde yazalım.

$$2y - 3x + 5 = 0$$

$$\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} = \frac{3x}{2} - \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

$$m = \frac{3}{2} \quad \text{olur.}$$

$x = 0$ için $y = \frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{5}{2}$

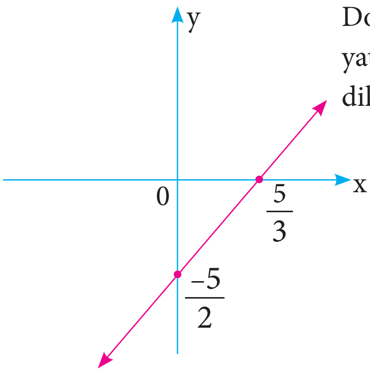
$y = \frac{-5}{2}$ olur.

$y = 0$ için $0 = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

$$\frac{-3x}{\cancel{2}} = \frac{-5}{\cancel{2}}$$

$$\frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}} = \frac{-5}{-3}$$

$$x = \frac{5}{3} \quad \text{olur}$$



Doğrunun sağa yatık olduğuna dikkat ediniz!

ç) $x + 4y - 2 = 0$ denklemini $y = mx + n$ şeklinde yazalım.

$$x + 4y - 2 = 0$$

$$\frac{\cancel{4}y}{\cancel{4}} = \frac{-x}{4} + \frac{2}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$m = -\frac{1}{4} \text{ olur.}$$

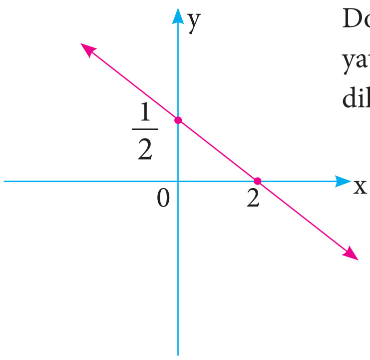
$x = 0$ için $y = \frac{-1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}$ olur.

$y = 0$ için $0 = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2}$

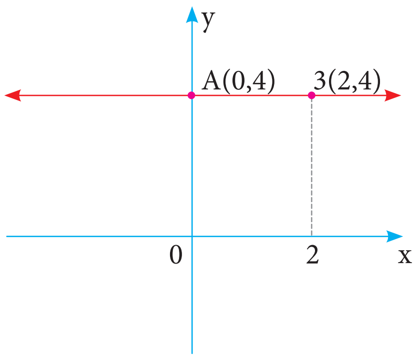
$$\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}$$

$$x = 2 \text{ olur.}$$



Doğrunun sola yatık olduğuna dikkat ediniz!

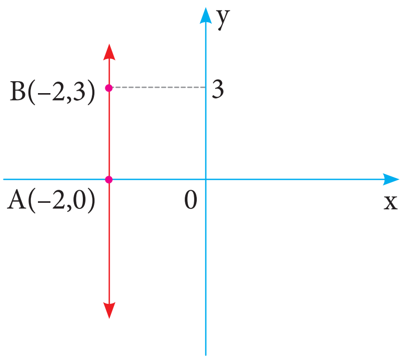
d)



A ve B noktaları için yatay uzunluk 2–0 = 2, dikey uzunluk 4 – 4 = 0 olur.

Eğim $= \dfrac{0}{2} = 0$ olur.

e)



A ve B noktaları için yatay uzunluk –2–(–2) = 0 dikey uzunluk 3–0 = 3 olur.

Eğim $= \dfrac{3}{0}$ tanımsız olur.

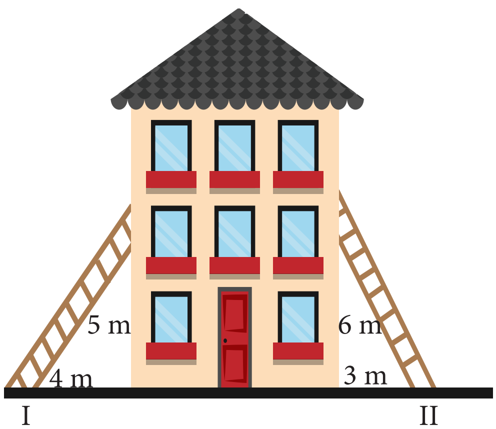
BİLGİ KUTUSU

Bir doğru sağa yatık ise eğimi pozitif, sola yatık ise eğimi negatif değerlidir.

Doğru x eksenine paralel ise eğimi sıfırdır.

Doğru y eksenine paralel ise eğimi tanımsızdır.

Örnek



Bir binaya her iki taraftan dayanmış merdivenlerin eğimlerini bulalım.

Çözüm

Merdivenlerin eğimini bulmak için dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranını bulalım.

I. Merdiven eğimi = $\frac{5}{4}$

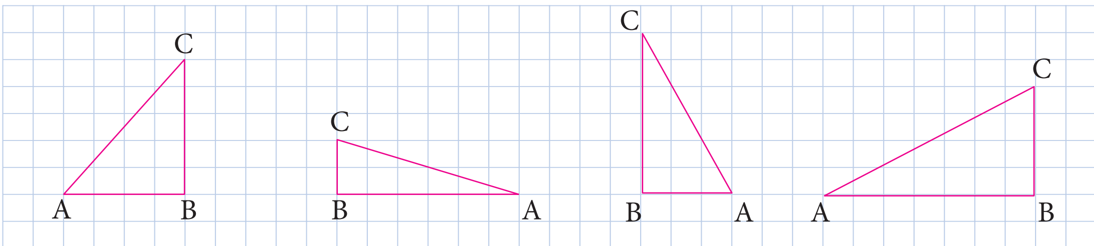
II. Merdiven eğimi = $\frac{6}{3} = 2$ olur.

BİLGİ KUTUSU

Günlük hayatta ikili modellemelerde eğim dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranıdır. Bu sorularda eğimin işareti üzerinde durmadığımıza dikkat ediniz!

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıdaki üçgenlerde [AC]'nin eğimlerini bulunuz.



2- Aşağıdaki doğrusal denklemlerin eğimlerini bulunuz.

a) $y = 2x$

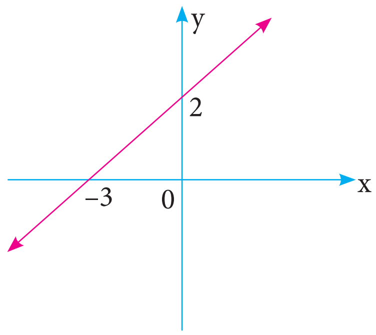
b) $y = 1 - 4x$

c) $y = -5x$

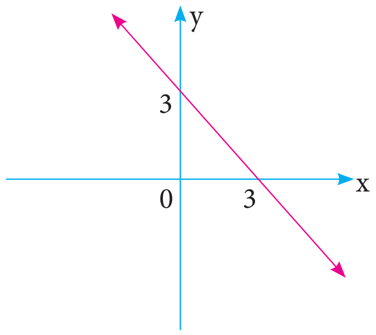
ç) $y = 3x + 8$

3- **Aşağıdaki doğruların eğimlerini bulunuz.**

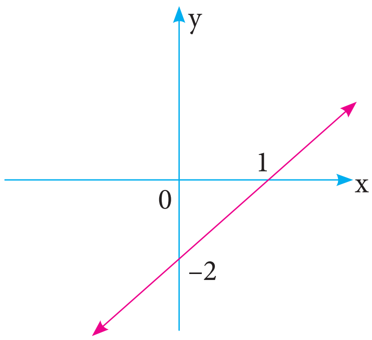
a)



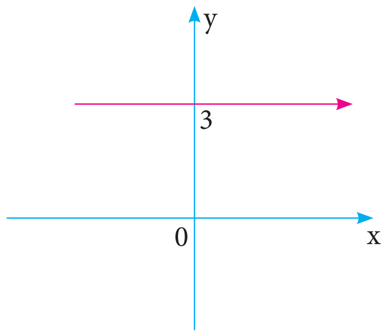
b)



c)



ç)



3-

Masa takviminin eğimini bulunuz.

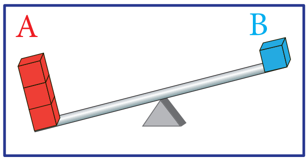
EŞİTSİZLİKLER

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik

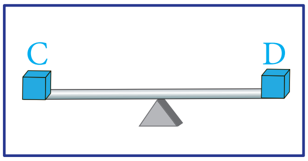
Yandaki görseli inceleyiniz. Taşların dengede nasıl durabildiğini düşününüz.

Örnek

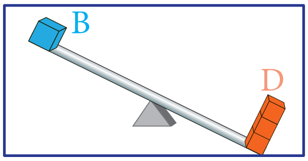
Aşağıdaki tahterevalli modellerini inceleyelim. Gördüklerimizi anlatalım.



1. resim



2. resim



3. resim

Çözüm

1. resimdeki kırmızı bloklar mavi bloktan ağır olduğundan tahteravalli dengede değildir. Bu durumu $A > B$ (A büyük B) şeklinde ifade ederiz.

2. resimde her iki mavi blok aynı kütlede olduğundan tahtervalli dengededir. Bu durumu $C = D$ (C eşit D) şeklinde ifade ederiz.

3. resimde turuncu bloklar mavi bloktan ağır olduğundan tahterevalli dengede değildir. Bu durumu $B < D$ (B küçük D) şeklinde ifade ederiz.

Örnek

Eşitsizliklerde kullandığımız “$>$, $<$, $\geq$, $\leq$” sembollerinin anlamlarını açıklayalım.

Çözüm

“$>$” Büyüktür. Bu sembolün solundaki ifade sağındakilerden büyüktür.

Örneğin, $9 > 6$, $12 > 7$, $28 > 13$ gibi benzer ifadeler.

"$<$" Küçüktür. Bu sembolün sağındaki ifade solundakinden küçüktür.

Örneğin; $7 < 11$, $12 < 23$, $25 < 26$ gibi benzer ifadeler.

"$\geq$" Büyüktür eşittir. Bu sembolün solundaki ifade sağındakine eşitde olabilir, büyük de olabilir. Örneğin; $x \geq 11$, $y \geq 18$ gibi benzer ifadeler.

"$\leq$" Küçüktür eşittir. Bu sembolün solundaki ifade sağındakine eşitde olabilir, küçük de olabilir. Örneğin; $x \leq 7$, $y \leq 13$, $z \leq 21$ gibi ifadeler.

Örnek

Aşağıdaki sözel ifadelere uygun eşitsizlikler karşılarına yazılmıştır. İnceleyiniz.

a) 11 sayısına eşit veya 11 sayısından büyük gerçek sayılar $\rightarrow x \geq 11$

b) 17 sayısına eşit veya 17 sayısından büyük gerçek sayılar $\rightarrow x \geq 17$

c) 9 sayısına eşit ve 9 sayısından küçük gerçek sayılar $\rightarrow y \leq 9$

ç) –2 katının 3 fazlası 12'den küçük veya 12'ye eşit olan gerçek sayılar $\rightarrow -2x + 3 \leq 12$

d) 3 fazlasının 2 katı 14'ten büyük veya 14'e eşit olan gerçek sayılar $\rightarrow 2(x+3) \geq 14$

Örnek

Aşağıdaki eşitsizliklere uygun özel ifadeleri yazalım.

a) $y < 17$ **b)** $x \leq 20$ **c)** $x > 30$ **ç)** $x \geq 42$

Çözüm

a) $y < 17 \rightarrow$ 17 sayısından küçük gerçek sayılar.
b) $x \leq 20 \rightarrow$ 20 sayısına eşit veya 20 sayısından küçük gerçek sayılar.
c) $x > 30 \rightarrow$ 30 sayısından büyük gerçek sayılar.
ç) $x \geq 42 \rightarrow$ 42 sayısına eşit veya 42 sayısından büyük gerçek sayılar.

Örnek

"Otomobillerin ön koltuğuna en az 10 yaşında olan çocuklar oturabilir." ifadesine uygun eşitsizliği yazalım.

Çözüm

Çocukların yaşını x ile gösterirsek eşitsizliği $x \geq 10$ şeklinde yazarız.

Örnek

"11 yaşını doldurmamış çocuklar bisikletle trafiğe çıkamaz." ifadesine uygun eşitsizliği yazalım.

Çözüm

Çocukların yaşını x ile gösterirsek eşitsizliği $x \leq 11$şeklinde yazarız.

BİLGİ KUTUSU

">, <, ≥, ≤" eşitsizliklere ait sembollerdir. Büyüktür sembolü (>), küçüktür sembolü (<), büyük eşittir sembolü (≥), küçük eşittir sembolü (≤) şeklinde gösterilir.

ALIŞTIRMALAR

1- "Anaokuluna en az 3 yaşında olan çocuklar kabul ediliyor." **ifadesine ait eşitsizliği yazınız.**

2- **4 eksiğinin 2 katı 18'den küçük olan sayıları ifade eden eşitsizliği yazınız.**

3- **Aşağıdaki sözel ifadelere uygun eşitsizlikleri noktalı yerlere yazınız.**

a) 27'den küçük doğal sayılar → ....

b) 58'den büyük doğal sayılar → ....

c) 3 sayısına eşit veya 3 sayısından büyük sayılar → ....

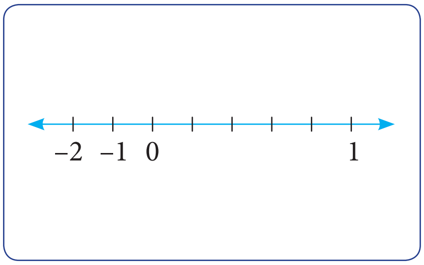
ç) 19 sayısına eşit veya 19 sayısından küçük sayılar → ....

4- **Aşağıdaki eşitsizliklere uygun sözel ifadeleri yazınız.**

a) $a < 24$ b) $b \leq 14$ c) $3x - 15 < 21$ ç) $2(x+7) \geq 16$

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliği Sayı Doğrusunda Gösterme

Yanda verilen sayı doğrusunu inceleyiniz. 0 ile 1 arası kaç eş parçaya bölünmüştür? Bu eş parçalara karşılık gelen sayılar hangileridir? Düşününüz.

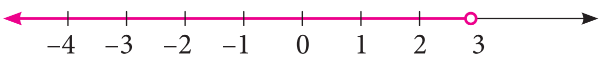


Örnek

$x < 3$ eşitsizliğini sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

Sayı doğrusu çizerek 3 sayısından küçük olan sayıları gösterelim.



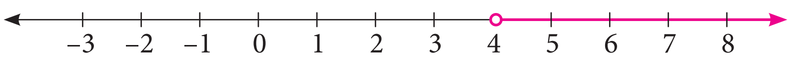
$x < 3$ eşitsizliğinde 3'ten küçük olan gerçek sayılardır. Eşitsizlikte sadece < (küçüktür) sembolü olduğundan başlangıç noktası olan 3'ün içi boştur.

Örnek

$x > 4$ eşitsizliğini sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

Sayı doğrusu çizerek 4 sayısından büyük olan sayıları gösterelim.



$x > 4$ eşitsizliğinde 4 ten büyük olan gerçek sayılardır.

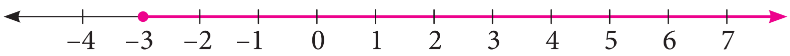
Eşitsizlikte sadece "> (büyüktür)" sembolü olduğundan başlangıç noktası olan 4'ün içi boş gösterilir.

Örnek

$x \geq -3$ eşitsizliğini sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

Sayı doğrusu çizelim –3'e eşit ve –3'ten büyük olan sayıları gösterelim.



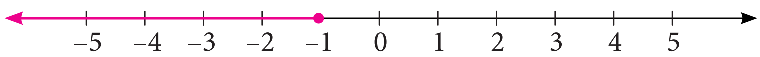
$x \geq -3$ eşitsizliğinde –3'e eşit ve –3'ten büyük olan gerçek sayılardır. Eşitsizlikte "≥ (büyük eşit)" sembolü olduğundan başlangıç noktası olan –3'ün içi dolu gösterilir.

Örnek

$x \leq -1$ eşitsizliğini sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

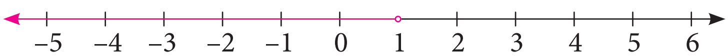
Sayı doğrusu çizelim –1'e **eşit** ve –1'den **küçük** olan sayıları gösterelim.



$x \leq -1$ eşitliğinde –1'e eşit ve –1'den küçük olan gerçek sayılardır. Eşitsizlikte "≤ (küçük eşit)" sembolü olduğunda başlangıç noktası olan –1'in içi dolu olarak gösterilir.

Örnek

Aşağıdaki sayı doğrularının ifade ettiği eşitsizlikler karşılarına yazılmıştır. İnceleyiniz.

a) 

$a < 1$

b) 

$a \leq 1$

c) 

$a > -2$

ç) 

$a \geq -2$

Örnek

$-1 \leq x < 2$ eşitsizlini sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

$-1 \leq x < 2$ eşitsizliğinde x sayısı -1'e eşit ve -1'den büyük bir sayıdır ancak x sayısının sağ tarafındaki küçük ($<$) sembolü x'in aynı zamanda 2'den küçük bir sayı olduğunu ifade etmektedir. Buna göre sayı doğrusu aşağıdaki gibidir.

Sayı doğrusunda da görüldüğü gibi x, -1'e eşit ve -1'den büyük aynı zamanda 2'den küçük olan gerçek sayılardır.

Örnek

$-3 \leq t < 7$ eşitsizliğini sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

$-3 \leq t < 7$ eşitsizliğinde t sayısı -3'te eşit ve -3'ten büyük bir sayıdır ancak t sayısının sağ tarafındaki küçük ($<$) sembolü t'nin aynı zamanda 7'den küçük bir sayı olduğunu ifade etmektedir. Buna göre sayı doğrusu aşağıdaki gibidir.

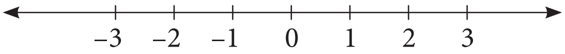
Sayı doğrusunda da görüldüğü gibi t, -3'e eşit ve -3'ten büyük, aynı zamanda 7'den küçük olan gerçek sayılardır.

BİLGİ KUTUSU

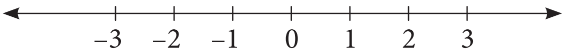
Verilen eşitsizlikler sayı doğrusunda gösterilirken eşitsizliğin "$<$, $>$, $\leq$, $\geq$" durumları dikkate alınır. Bu durumlar sayı doğrusunda başlangıç noktaları dikkate alınarak aşağıdaki gibi gösterilir.

ALIŞTIRMALAR

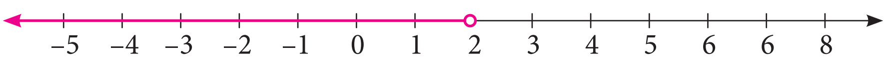
1- **$x > -1$ eşitsizliğini aşağıdaki sayı doğrusunda gösteriniz.**

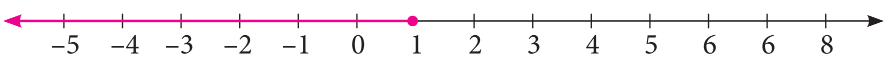


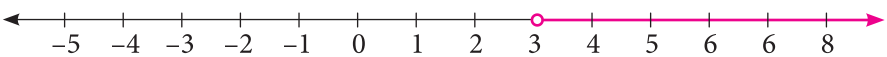
2- **$x \geq -1$ eşitsizliğini aşağıdaki sayı doğrusunda gösteriniz.**

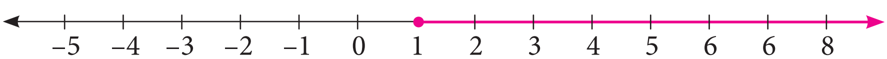


3- **Aşağıdaki sayı doğrularının ifade ettiği eşitsizlikleri karşılarındaki kutulara yazınız.**

a) 

b) 

c) 

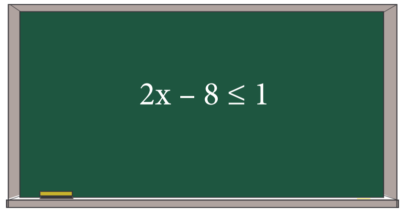
ç) 

4- **Aşağıdaki eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösteriniz.**

a) $x \leq 5$ **b)** $t \geq 4$ **c)** $-1 \leq t < 2$ **ç)** $-2 \leq x < 4$

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Çözümü

Yandaki resmi inceleyiniz. Tahtada verilen eşitsizliği nasıl ifade edersiniz? Düşününüz.



Örnek

x –5 > 6 eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım. Sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

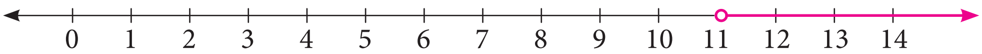
x –5 > 6 eşitsizliğinde bilinmeyeni (x) yalnız bırakalım. Eşitsizliğin her iki yanına 5 ekleyelim.

$x - \cancel{5} + \cancel{5} > 6 + 5$

$x > 11$ olur.

Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi 11’den büyük olan gerçek sayılardır.

x > 11 eşitsizliğini sayı doğrusunda



şeklinde gösteririz.

Örnek

x + 3 < 5 eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım. Sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

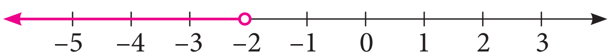
x + 3 < 5 eşitsizliğin her iki yanından 3 çıkaralım.

$x + \cancel{3} - \cancel{3} < 5 - 3$

$x < 2$ olur.

Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi 2’den küçük olan gerçek sayılardır.

x < 2 eşitsizliğini sayı doğrusunda



şeklinde gösterilir.

Örnek

15 < 16 eşitsizliğinin her iki yanına 10 ekleyelim. Sonucu yorumlayalım.

Çözüm

$$15 < 16$$
$$15 + 10 < 16 + 10$$
$$25 < 26 \text{ olur.}$$

O hâlde bir eşitsizliğin her iki yanına aynı sayı eklenirse eşitsizlik bozulmaz.

BİLGİ KUTUSU

Eşitsizliklerin çözümü denklemlerin çözümü gibidir. Eşitsizlik çözülürken bilinmeyen, eşitsizliğin bir tarafında yalnız bırakılır.

Bir eşitsizliğin her iki yanına aynı sayı eklenir veya her iki yanından aynı sayı çıkarılırsa eşitsizlik bozulmaz.

Örnek

$2x - 6 \geq 8$ eşitsizliğinin çözmünü bulalım.

Çözüm

$2x - 6 \geq 8$ eşitsizliğinin her iki yanına 6 ekleyelim.

$$2x - \cancel{6} + \cancel{6} \geq 8 + 6$$

$$2x \geq 14$$ (Eşitsizliğinin her iki yanını 2 ye bölelim.)

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} \geq \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\cancel{2}}$$

$$x \geq 7 \text{ olur.}$$

Örnek

30 > 10 eşitsizliğinin her iki yanını aynı pozitif sayıyla çarpıp bölelim. Sonucu yorumlayalım.

Çözüm

$30 > 10$ (Eşitsizliğinin her iki yanını 10 ile çarpalım.)

$30 \cdot 10 > 10 \cdot 10$

$300 > 100$ olur.

O hâlde bir eşitsizliğin her iki yanı aynı pozitif sayı ile çarpılırsa eşitsizlik bozulmaz.

$30 > 10$ (Eşitsizliğinin her iki yanını 10'a bölelim.)

$$\frac{\overset{3}{\cancel{30}}}{{}_{1}\cancel{10}} > \frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{10}_{1}}$$

$3 > 1$ olur.

O hâlde bir eşitsizliğin her iki yanı aynı pozitif sayıya bölünürse eşitsizlik bozulmaz.

Örnek

$40 > 20$ eşitsizliğinin her iki yanını aynı negatif sayıyla çarpıp bölelim. Sonucu yorumlayalım.

Çözüm

$40 > 20$ eşitsizliğinin her iki yanını -10 ile çarpalım.

$40 \cdot (-10) < 20 \cdot (-10)$

$-400 < -200$ (Eşitsizlik yön değiştirdi.)

$40 > 20$ (Eşitsizliğinin her iki yanını -10'a bölelim.)

$$\frac{{}^{-4}\cancel{40}}{-\cancel{10}} < \frac{\cancel{20}}{-\cancel{10}}$$

$-4 < -2$ (Eşitsizlik yön değiştirdi.)

BİLGİ KUTUSU

Bir eşitsizliğin her iki yanı aynı negatif sayı ile çarpılır veya aynı negatif sayıya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir. Eşitsizliğin yön değiştirmesi küçüktür (<) sembolünün büyüktür (>) olması veya büyüktür. (>) sembolünün küçüktür (<) olması demektir.

ALIŞTIRMALAR

1- $x - 7 > 10$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Sayı doğrusunda gösteriniz.

2- $x + 5 < 14$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Sayı doğrusunda gösteriniz.

3- $3x - 9 \geq 18$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Sayı doğrusunda gösteriniz.

4- $50 > 70$ eşitsizliğinin her iki yanını aynı pozitif sayıyla çarpıp bölünüz.

Sonucu yorumlayınız.

5- $30 > 20$ eşitsizliğinin her iki yanını aynı negatif sayıyla çarpıp bölünüz.

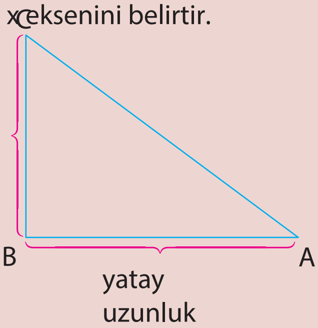
Sonucu yorumlayınız.

ÖZET

- a , b gerçek sayı, $a \neq 0$ ve x değişken olmak üzere $ax + b = 0$ ifadesine birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Denklemi çözmek için eşitliğin her iki tarafına aynı sayı eklenir veya çıkarılır, eşitliğin her iki tarafı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılır veya bölünür.
- İki sayı doğrusunun 0(sıfır) noktasında dik kesişmesiyle oluşan sisteme koordinat sistemi denir. Koordinat sisteminde yatay sayı doğrusu x ekseni, dikey sayı doğrusu y ekseni olarak adlandırılır. x ve y eksenlerinin kesim noktasına başlangıç noktası veya orijin denir.
- Koordinat sisteminde bir noktanın yeri A(a , b) şeklinde belirtilir. Sırasıyla a ve b sayılarının oluşturduğu sayı ikilisine sıralı ikili denir.
- x ve y değişken, a, b ve c gerçek sayı $a \neq 0$ veya $b \neq 0$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ biçimin-deki denklemlere doğrusal denklem denir. x değişkeninin aldığı değerlere bağlı olarak y değişkeni farklı değerler alır. Doğrusal denklemlerde x değişkenine bağımsız değişken, y değişkenine bağımlı değişken denir.
- a sıfırdan farklı gerçek bir sayı olmak üzere $x = a$ şeklindeki doğrular y eksenine paraleldir.
- a sıfırdan farklı gerçek bir sayı olmak üzere $y = a$ şeklindeki doğrular x eksenine paraleldir.
- a ve b sıfırdan farklı gerçek bir sayı olmak üzere, $ax + by = 0$ şeklindeki sabit terimi 0 olan doğrular orijinden geçer.
- a, b ve c sıfırdan farklı gerçek bir sayı olmak üzere $ax + by + c = 0$ şeklindeki doğrular eksenleri keser. Doğruların eksenleri kestiği noktalar, $x = 0$ ve $y = 0$ değerlerine karşılık gelen noktalardır.
- Koordinat sisteminde $x = 0$ doğrusu y eksenini $y = 0$ doğrusu x eksenini belirtir.

Yandaki şekilde [CA] için dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranına eğim denir ve m ile gösterilir.

$$m = \frac{\text{Dikey uzunluk}}{\text{Yatay uzunluk}}, \quad m = \frac{|CB|}{|BA|}$$



- Koordinat sisteminde bir doğrunun eğimini bulmak için doğrunun denkleminden yararlanılır. m ve n gerçek sayıları için $y = mx + n$ doğrusal denkleminin grafiğinin eğimi x'in katsayısı olan m sayısıdır.

- Bir doğru sağa yatık ise eğimi pozitif sola doğru yatık ise eğimi negatif değerlidir. Doğru x eksenine paralel ise eğimi sıfırdır. Doğru y eksenine paralel ise eğimi tanımsızdır.

Büyüktür → >,

Küçüktür → <,

Büyük eşittir → ≥,

Küçük eşittir. → ≤, eşitsizliklere ait sembollerdir.

Sayı doğrusundaki eşitsizlik durumlarına ait gösterimler aşağıdaki gibidir.

- Eşitsizliklerin çözümü denklemlerin çözümü gibidir. Eşitsizlik çözülürken bilinmeyen, eşitsizliğin bir tarafında yalnız bırakılır. Bir eşitsizliğin her iki yanına aynı sayı eklenir veya her iki yanından aynı sayı çıkarılırsa eşitsizlik bozulmaz. Bir eşitsizliğin her iki yanı aynı negatif sayı ile çarpılır veya aynı negatif sayıya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir. Eşitsizliğin yön değiştirmesi küçüktür (<) sembolünün büyüktür (>) olması veya büyüktür (>) sembolünün küçüktür (<) olması demektir.

4. ÜNİTE
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $3x - 8 = -5$ **denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2

C) 3 D) 4

2. $\frac{1-2x}{x} = \frac{2}{3}$ **denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{8}$

C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$

3. (5, –4) **noktası ile ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?**

A) x eksenine uzaklığı –4'tür.

B) y eksenine uzaklığı 5'tir.

C) Orijinin üzerindedir.

D) III. bölgededir.

HAYAT BOYU ÖĞRENME

4. Ayşe her gün 30 sayfa okuyarak 180 sayfalık kitabı 6 günde bitiriyor.

Buna göre Ayşe'nin okuduğu sayfa sayının (y) geçen süre (x) arasındaki doğrusal ilişkinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) x+y =180 B) x+y =30

C) y+30x = 0 D) y =30x

5. Kaynamakta olan 1000 ml su her dakika 100 ml buharlaşarak 10 dakikada tamamen buharlaşıyor.

Buharlaşan su ile dakika arasındaki ilişkiye göre aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

I. Dakika bağımlı değişkendir.

II. Yukarıdaki ifadeyi temsil eden doğrusal denklem y = 1000 – 100x olur.

III. Kaynamakta olan su bağımlı değişkendir.

IV. 10. dakikanın sonunda 100 ml su kalır.

A) I - II B) II - III

C) I - II - III D) I - III - IV

6. $4y - x - 8 = 0$ **denkleminin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?**

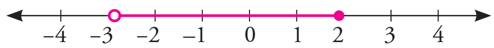
A) 8
B) 4
C) 1
D) $\frac{1}{4}$

7. Bir sınıftaki kız öğrenci sayısı $2x + 5$, erkek öğrenci sayısı $3x - 1$'dir.

Sınıftaki erkek öğrenci sayısı kız öğrenci sayısından fazla olduğuna göre bu sınıfta en az kaç kız öğrenci vardır?

A) 17
B) 18
C) 19
D) 20

8.



Yukarıdaki sayı doğrusunu ifade eden eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?

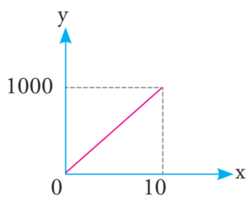
A) $-3 < x \leq 2$
B) $-3 < x < 2$
C) $-3 \leq x < 2$
D) $-3 \leq x \leq 2$

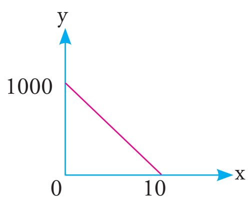
9. "Berkan'ın yaşının 2 fazlasının 3 katı 75'ten küçüktür" **ifadesine uygun eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?**

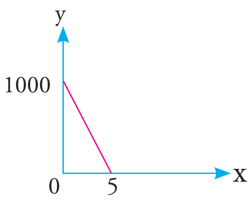
A) $2x+3 < 75$
B) $2(x+3) < 75$
C) $3(x+2) > 75$
D) $3(x+2) < 75$

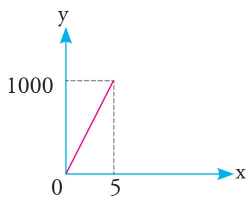
10. Kaynamakta olan 1000 ml su her dakika 100 ml buharlaşarak 10 dakikada tamamen bular hâline dönüşmektedir.

Buna göre buharlaşan su (y) ile geçen süre (x) arasındaki ilişkinin grafiği aşağıdakilerden hangidisir?

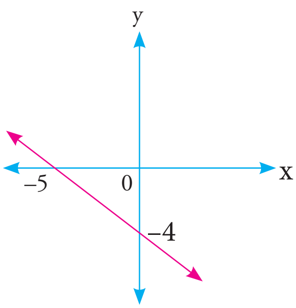
A)


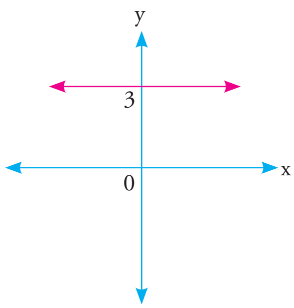
B)


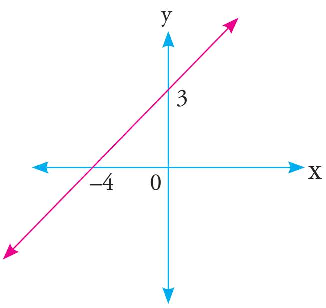
C)


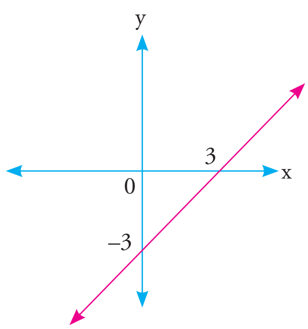
D)


11. **Aşağıda verilen doğrulardan hangisinin eğimi negatiftir?**

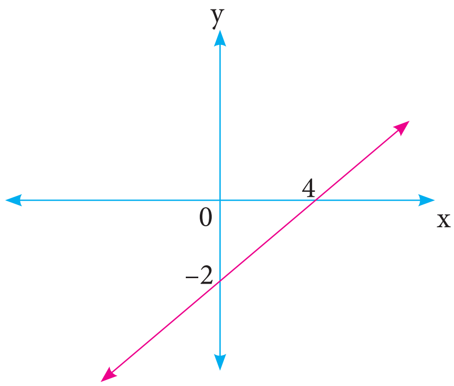
A)


B)


C)


D)


12.



Yukarıda x – 2y = 4 denkleminin grafiği veriliyor.

Buna göre aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. Doğru x eksenini 4 noktasında keser.

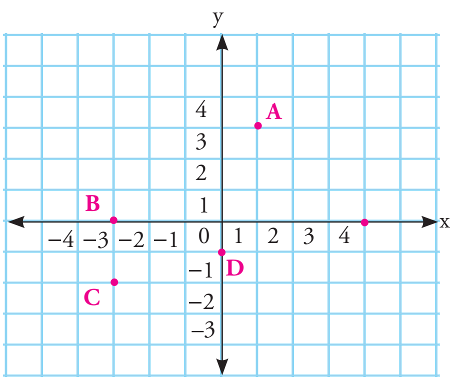
II. Doğru y eksenini –2 noktasında keser.

III. Doğru x eksenine paraleldir.

IV. Doğru orijinden geçer.

A) I - II B) I - III C) I - II - III D) I - II - IV

13.



Yukarıdaki koordinat sisteminde verilen A, B, C, D noktalarından hangisi aşağıda yanlış verilmiştir?

A) A(1,3) B) B(–3,0)

C) (–2,–3) D) (0,–1)

5. ÜNİTE

GEOMETRİ

ÜNİTE KONULARI

- ▶ **ÜÇGENLER**
- ▶ **EŞLİK VE BENZERLİK**

5. ÜNİTE

• ÜÇGENLER

• EŞLİK VE BENZERLİK

NELER ÖĞRENECEĞİZ ?

Bu ünitenin birinci bölümününde;

- Üçgende kenarortay, açıortay ve yüksekliği inşa etmeyi,
- Üçgenin iki kenar uzunluğunun toplamı veya farkı ile üçüncü uzunluğu ilişkilendirmeyi,
- Üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarların karşısındaki açıların ölçülerini ilişkilendirmeyi,
- Yeterli sayıda elemanın ölçüleri verilen bir üçgeni çizmeyi,
- Pisagor bağıntısını oluşturmayı öğreneceğiz.

Bu ünitenin ikinci bölümününde;

- Eşlik ve benzerliği ilişkilendirir, eş ve benzer şekillerin ve açı ilişkilerini belirlemeyi,
- Benzer çokgenlerin benzer oranını belirlemeyi, bir çokgene eş ve benzer çokgenler oluşturmayı öğreneceğiz.

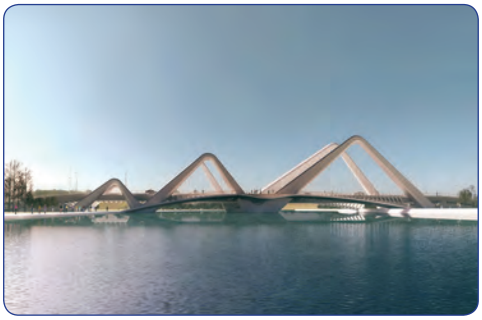
ANAHTAR KAVRAMLAR

- Kenarortay
- Yükseklik
- Dik kenarlar
- Pisagor bağıntısı
- Açıortay
- Üçgen eşitsizliği
- Hipotenüs
- Benzerlik oranı

ÜÇGENLER

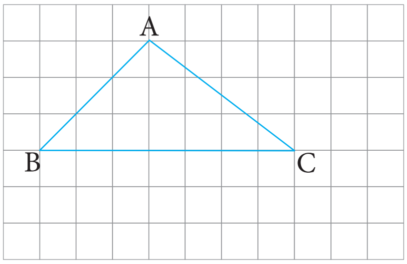
Üçgende Kenarortay, Açıortay ve Yükseklik

Mühendislik ve mimarlık alanlarındaki en önemli geometrik şekillerden biri üçgendir. Çünkü kare, dikdörtgen gibi şekiller herhangi bir köşesinden kuvvet uygulandığında şekilleri bozulurken üçgen şeklinin bozulmadığı görülür. Ayrıca üçgen şeklindeki yapıların diğer şekillerdeki yapılara göre daha dayanıklı olduğu görülür.



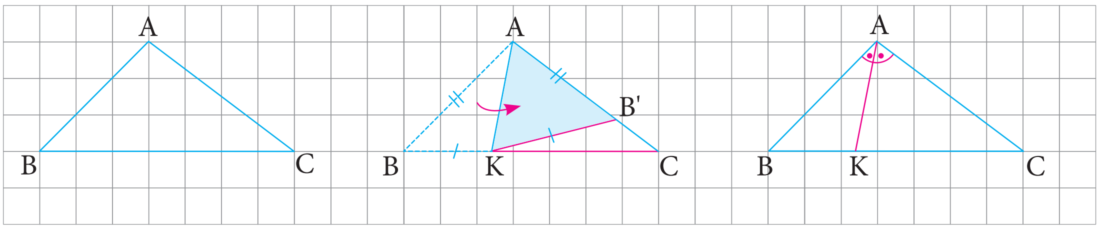
Örnek

Aşağıda verilen ABC üçgeninin kenarortay, açıortay ve yüksekliğini bulalım.

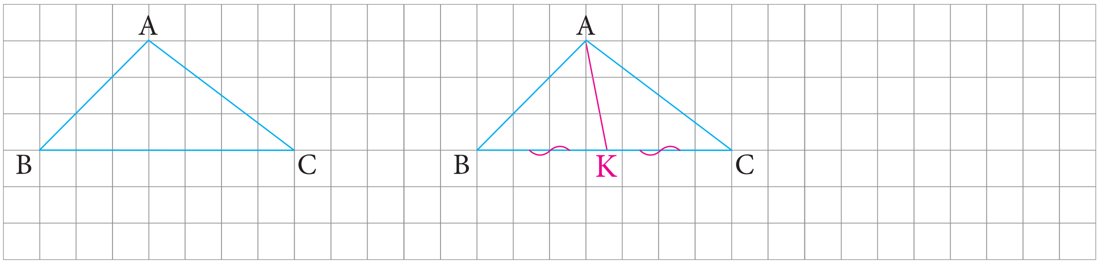


Çözüm

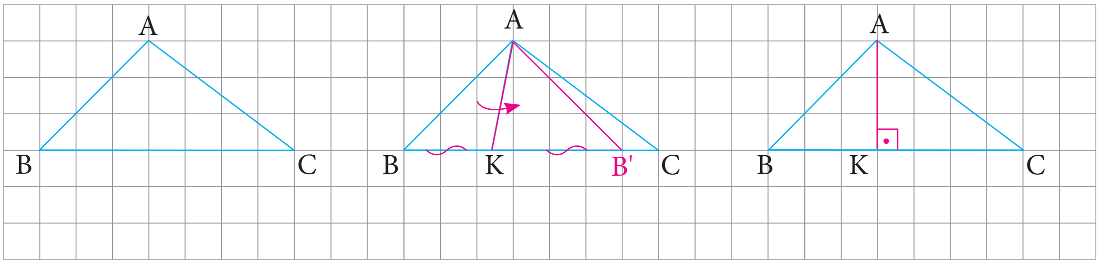
Aşağıda verilen üçgenler üzerinde yapıların katlama çalışmalarını inceleyiniz.



Yukarıdaki $\widehat{ABC}$'nde [AB]'nı [AC] üzerine gelecek şekilde katlayalım. Oluşan kat izi $\widehat{A}$ nın açıortayı [AK]'nı verir.

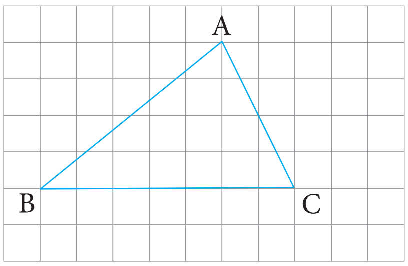


Kareli kâğıt üzerinde [BC] nin orta noktası K dır. [AK], BC kenarına ait kenarortaydır.



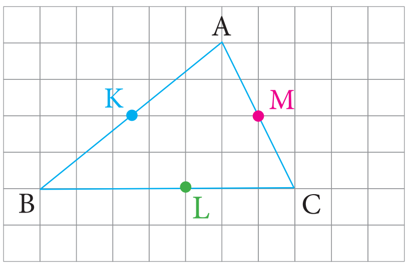
Yukarıdaki $\widehat{ABC}$ nde B köşesini BC kenarı üzerine gelecek şekilde katlayalım. Oluşan kat izi BC kenarına ait [AK] yüksekliktir.

Örnek

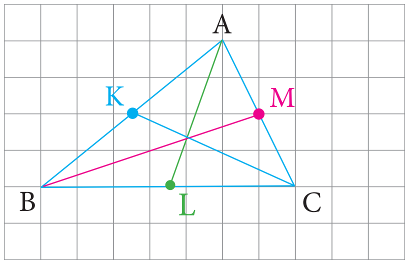


Yandaki kareli kâğıt üzerinde verilen $\widehat{ABC}$ kenarortaylarını gösterelim.

Çözüm



Kareli kâğıt üzerinde kenarların orta noktalarını belirleyelim.



Kenarların orta noktaları ile kenara karşılık gelen köşeyi birleştirelim.

[BC]'nin orta noktası L'dir. [AL], BC kenarının kenarortayıdır.

[AB] nin orta noktası K'dır. [CK], AB kenarının kenarortayıdır.

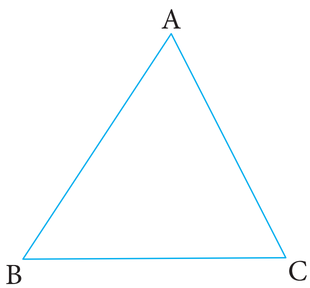
[AC] nin orta noktası M'dir. [BM], AC kenarının kenarortayıdır.

BİLGİ KUTUSU

Üçgenin bir köşesi ile köşeye karşılık gelen kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçasına **kenarortay** denir.

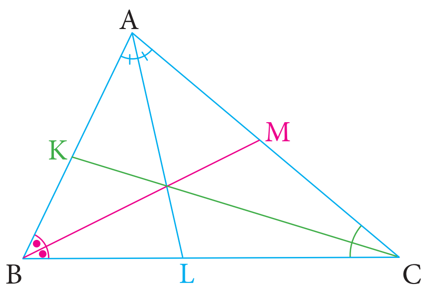
Bir üçgenin kenarortayları, üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişir.

Örnek



Yandaki $\widehat{ABC}$ nin iç açılarına ait açıortayları bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$ nin kenarlarının birbiri üzerine katlanarak elde edilen açıortaylar şekildeki gibidir.

$\widehat{A}$ nın açıortayı [AL] dır. $\Rightarrow m(\widehat{BAL}) = m(\widehat{LAC})$ olur.

$\widehat{B}$ nın açıortayı [BM] dır. $\Rightarrow m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{MBC})$ olur.

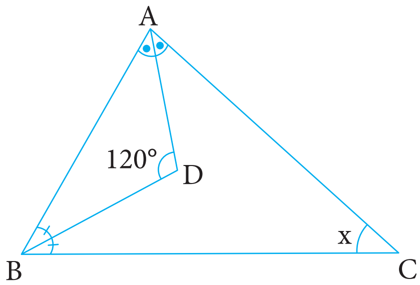
$\widehat{C}$ nın açıortayı [CK] dır. $\Rightarrow m(\widehat{BCK}) = m(\widehat{KCA})$ olur.

BİLGİ KUTUSU

Üçgenin bir iç açısını ortadan iki eş açıya ayıran doğru parçasına **açıortay** denir.

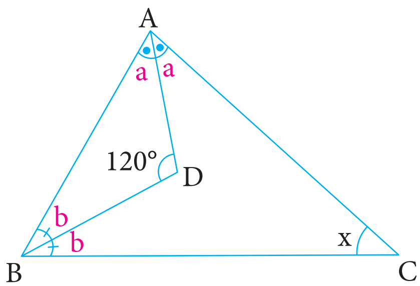
Bir üçgenin açıortayları, üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişir.

Örnek



Yandaki üçgende $m(\widehat{ADB}) = 120°$ ve [AD] ile [BD] iç açıortaylar ise $m(\widehat{ACB}) = x$'i bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{A}) = 2a$, $m(\widehat{B}) = 2b$ olsun.

$\widehat{ADB}$ de iç açılar toplamı;

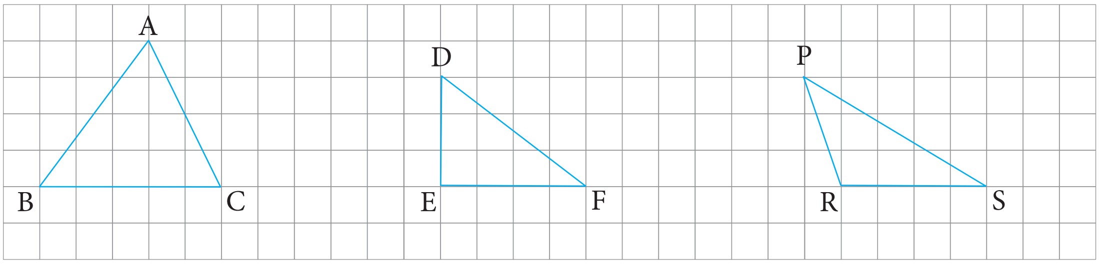
$$a + b + 120° = 180°$$
$$a + b = 180° - 120°$$
$$a + b = 60° \text{ olur.}$$

$\widehat{ADB}$ de iç açılar toplamı;

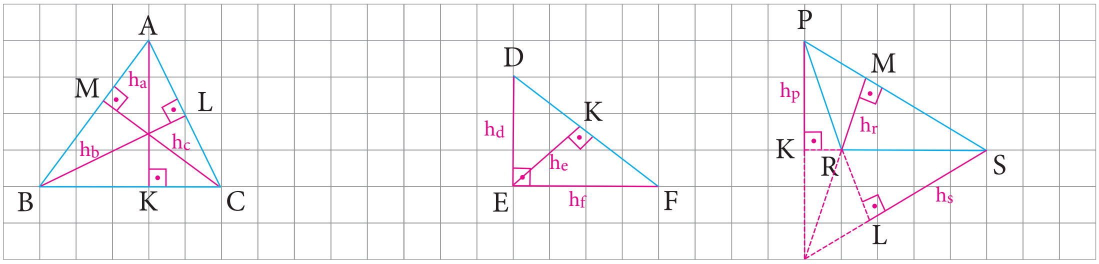
$$2a + 2b + x = 180°$$
$$2(a+b) + x = 180°$$
$$2 \cdot 60° + x = 180°$$
$$120° + x = 180°$$
$$x = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60° \text{ bulunur.}$$

Örnek

Aşağıda kareli kâğıt üzerinde verilen üçgenlerin yüksekliklerini çizelim.



Çözüm



Dar açılı $\widehat{ABC}$ de; $[AK] = h_a$, $[BC] =$ a kenarına ait

$[BL] = h_b$, $[AC] =$ b kenarına ait

$[CM] = h_c$, $[AB] =$ c kenarına ait yüksekliktir.

DEF dik üçgeninde; $[DE] = h_d$, $[EF] =$ d kenarına ait

$[EF] = h_f$, $[DE] =$ f kenarına ait

$[EK] = h_e$, $[DF] =$ e kenarına ait yüksekliktir.

Geniş açılı $\widehat{PRS}$ de; $[PK] = h_p$, $[RS] =$ p kenarına ait

$[SL] = h_s$, $[PR] =$ s kenarına ait

$[RM] = h_r$, $[PS] =$ r kenarına ait yüksekliktir.

BİLGİ KUTUSU

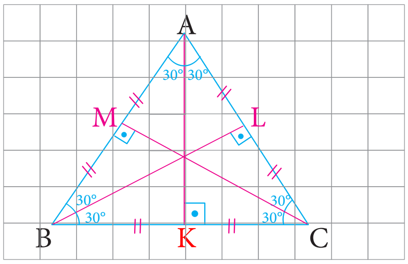
Üçgenin bir köşesinden karşısındaki kenara veya kenarın uzantısına dik olarak çizilen doğru parçasına o kenara ait **yükseklik** denir.

Dar açılı üçgende yükseklikler üçgenin iç bölgesinde, dik açılı üçgende, dik açının köşesinde, geniş açılı üçgende ise üçgenin dış bölgesinde kesişir.

Örnek

Eşkenar üçgende kenarortay, açıortay ve yükseklik arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm



ABC eşkenar üçgeninde;

[AK], [BC] kenarını iki eş parçaya böldüğünden dolayı bu kenara ait kenarortaydır. $|BK| = |KC|$

[AK], A açısını iki eş parçaya böldüğünden dolayı bu açıya ait açıortaydır. $m(\widehat{BAK}) = m(\widehat{KAC})$

[AK], [BC] kenarına A köşesinden inen dik uzunluk olduğundan dolayı bu kenara ait yüksekliktir.

Dikkat edilirse [AK], [CM] ve [BL], $\widehat{ABC}$'nin hem kenarortayı hem açıortayı hem de yüksekliğidir.

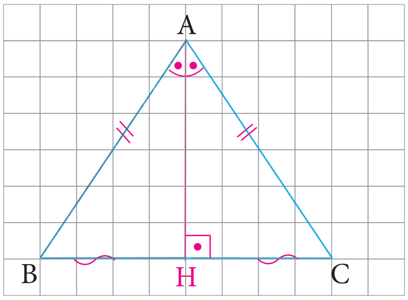
BİLGİ KUTUSU

Eşkenar üçgende kenarortay, açıortay ve yükseklik aynı doğru parçasıdır.

Örnek

İkizkenar üçgende, eş olmayan kenara ait kenarortay, açıortay ve yükseklik arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm



ABC ikizkenar üçgeninde |AB| = |AC| dir.

[AH], [BC] kenarını iki eş parçaya böldüğünden dolayı bu kenara ait kenarortaydır. |BH| = |HC|

[AH], A açısını iki eş parçaya böldüğünden dolayı bu açıya ait açıortaydır.

[AH], [BC] kenarına A köşesinden inen dik uzunluk olduğundan dolayı bu kenara ait yüksekliktir.

Dikkat edilirse [AH], $\widehat{ABC}$'nin hem kenarortayı hem açıortayı hem de yüksekliğidir.

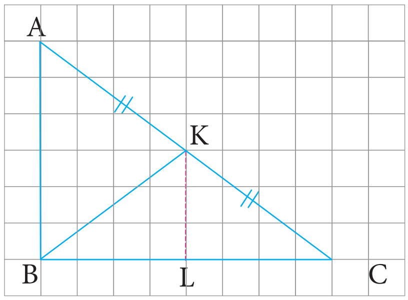
BİLGİ KUTUSU

İkizkenar üçgende eş olmayan kenara ait kenarortay bu kenara ait hem açıortaydır hem de yüksekliktir.

Örnek

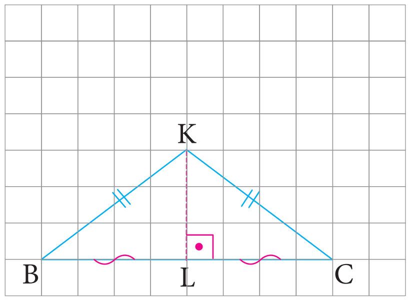
Dik üçgende hipotenüs ile bu kenara ait kenarortay arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

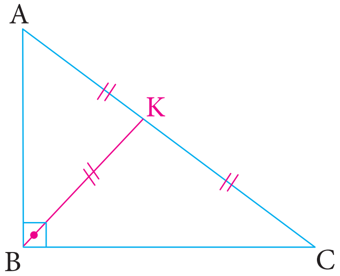


ABC dik üçgeninde [AC] kenarına (hipotenüs) ait [BK] kenarortayını çizelim.

⇒



$\widehat{BKC}$'nde [KL], [BC] kenarına ait hem yükseklik hem de kenarortay olduğundan dolayı BKC ikizkenar üçgendir ve |BK| = |KC| olur.

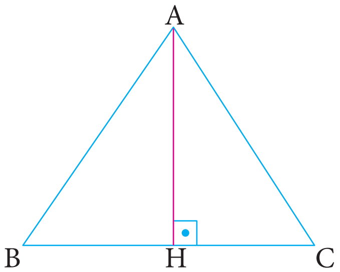


Dikkat edilirse [AC] kenarına ait [BK] kenarortayı [AC] kenarının uzunluğunun yarısına eşittir.

BİLGİ KUTUSU

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

Örnek

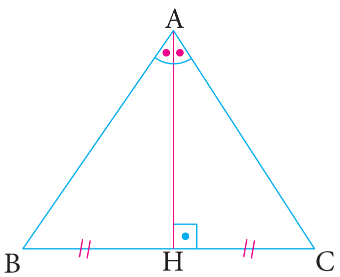


ABC eşkenar üçgeninde bir kenar uzunluğu 10 cm'dir.

$[AH] \perp [BC]$ olduğuna göre

[BH] ve [HC]'nın uzunlukları ile $\widehat{BAH}$ ve $\widehat{HAC}$'nın ölçülerini bulalım.

Çözüm

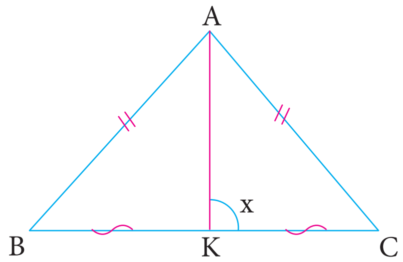


ABC eşkenar üçgeninde kenarortay, açıortay ve yükseklik aynı doğru parçası olduğundan

$|BH| = |HC| = \frac{10}{2} = 5$ cm ve

$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC}) = 30°$ olur

Örnek

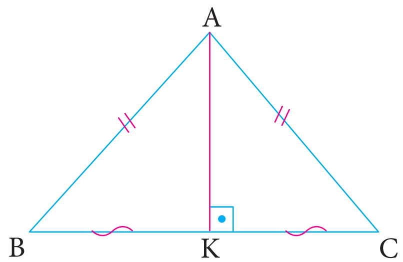


ABC ikizkenar üçgeninde

$|AB| = |AC|$ ve $|BK| = |KC|$ olduğuna göre

$m(\widehat{AKC}) = x$'in ölçüsünü bulalım.

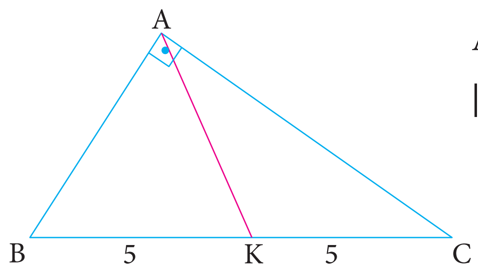
Çözüm



İkizkenar üçgende eş olmayan kenara ait kenarortay bu kenara ait hem açıortay hem de yükseklik olduğundan

$m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{AKC}) = 90°$ olur.

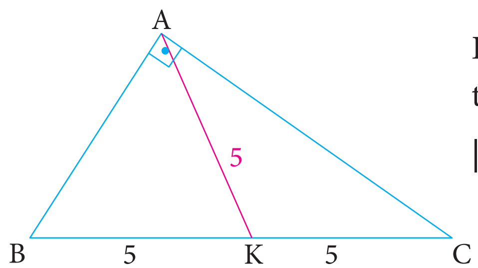
Örnek



ABC dik üçgeninde $|BK| = |KC| = 5$ cm dir.

$|AK|$'nın alacağı değeri bulalım.

Çözüm

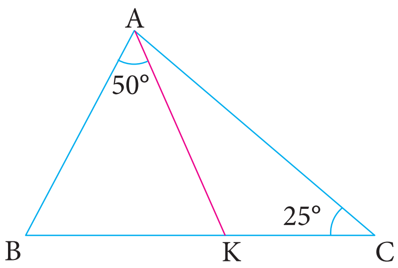


Dik üçgende hipotenüse ait kenar kenarortay hipotenüs uzunluğunun yarısı olduğundan

$|AK| = |BK| = |KC| = 5$ cm olur.

ALIŞTIRMALAR

1-

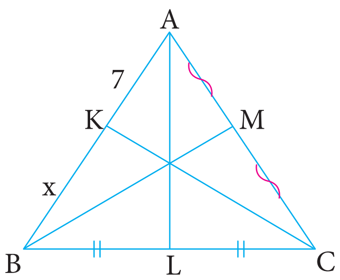


ABC üçgeninde [AK] açıortaydır.

$m(\widehat{BAK}) = 50°$, $m(\widehat{ACB}) = 25°$

olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$'nü bulunuz.

2-

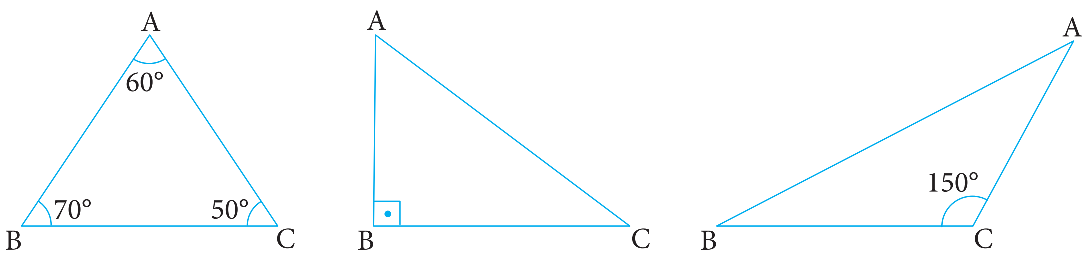


ABC üçgeninde [AL] ve [BM] kenarortaydır.

$|AK| = 7$ cm

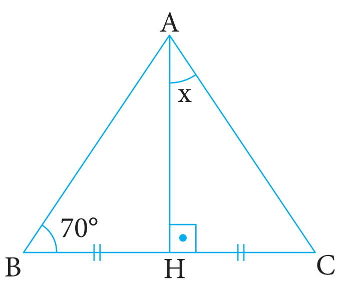
olduğuna göre $|BK| = x$'in uzunluğunu bulunuz.

3-



Yukarıdaki üçgenlerde yüksekliklerin kesim noktasının üçgenin iç bölgesinde mi, üzerinde mi yoksa dış bölgesinde mi olduğunu gösteriniz.

4-



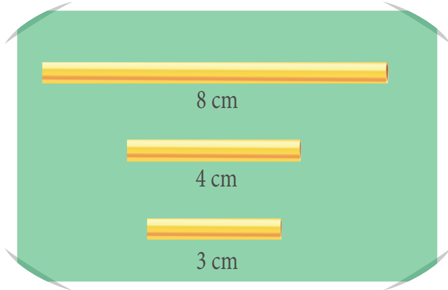
ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ dir.

$[AH] \perp [BC]$ ve $m(\widehat{ABC}) = 70°$

olduğuna göre $m(\widehat{HAC}) = x$'i bulunuz.

Üçgenlerin Kenarları Arasındaki İlişkiler

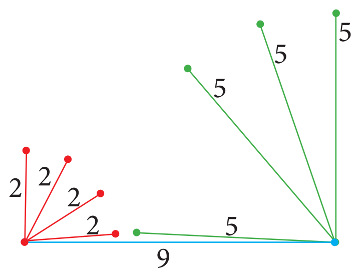
Görseldeki panoda 3, 4 ve 8 cm den oluşan çubuklar vardır size göre bu çubuklarla bir üçgen oluşturulabilir mi? Düşününüz.



Örnek

Aşağıda verilen farklı uzunluktaki doğru parçaları ile üçgen oluşturmaya çalışalım.

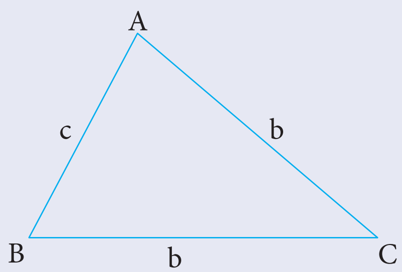
Çözüm



2 cm ve 5 cm uzunluğundaki doğru parçalarını 9 cm'lik doğru parçasının üzerine yerleştirdiğimizde uzunlukları toplamı 9 cm'den büyük olmadığı için üçgen çizilemez.

BİLGİ KUTUSU

Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük diğer iki kenarın uzunluğunun farkının mutlak değerinden büyüktür.



$|b - c| < a < b + c$

$|a - c| < b < a + c$

$|a - b| < c < a + b$

Örnek

Aşağıda verilen uzunluklardan üçgen elde edilip edilemeyeceğini inceleyelim.

a) 5 cm, 6 cm, 7 cm **b)** 2 cm, 10 cm, 8 cm **c)** 30 cm, 10 cm, 5 cm

Çözüm

Verilen uzunluklardan bir üçgen elde edebilmek için bir kenar uzunluğu diğer kenar uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyük olması gerekir.

a)

$$|7-5| < 6 < 7+5$$
$$|2| < 6 < 12$$
$$2 < 6 < 12$$

Eşitsizlik doğru olduğundan verilen uzunluklardan bir üçgen elde edilir.

b)

$$|8-10| < 2 < 10+8$$
$$|-2| < 2 < 18$$
$$2 \nless 2 < 18$$

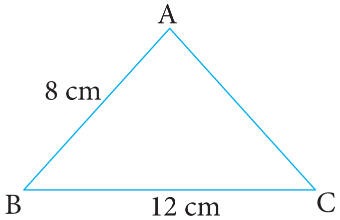
Eşitsizlik doğru olmadığından verilen uzunluklardan bir üçgen elde edilemez.

c)

$$|10-5| < 30 < 10+5$$
$$5 < 30 \nless 15$$

Eşitsizlik doğru olmadığından verilen uzunluklardan bir üçgen elde edilemez.

Örnek



Yandaki üçgende

$|AB| = 8$ cm ve $|BC| = 12$ cm olduğuna göre $|AC|$'nin alabileceği doğal sayıları bulalım.

Çözüm

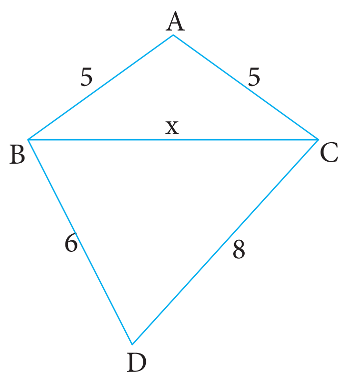
Üçgende bir kenar uzunluğu diğer iki kenarın uzunluğunun toplamından küçük farkından büyük olacağından

$12 - 8 < |AC| < 12 + 8$

$4 < |AC| < 20$ olur.

Bu durumda |AC|, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 doğal sayılarından biri olabilir.

Örnek



Yandaki dörtgende verilenlere göre x'in alabileceği tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

$\overset{\frown}{ABC}$ için $5 - 5 < x < 5 + 5$

$\overset{\frown}{BDC}$ için $8 - 6 < x < 8 + 6$ olmalıdır.

$0 < x < 10$ eşitsizliklerinin ortak çözümü alt sınırların en büyük değeri ile üst sınırlarının en küçük değeri arasındadır.

$\underbrace{2 < x < 14}$

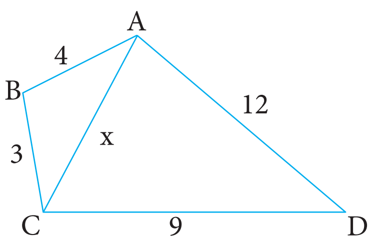
$2 < x < 10$ x = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 değerlerini alabilir.

ALIŞTIRMALAR

1- **Aşağıda verilen uzunluklar ile bir üçgen oluşturulabilir mi? Bulunuz.**

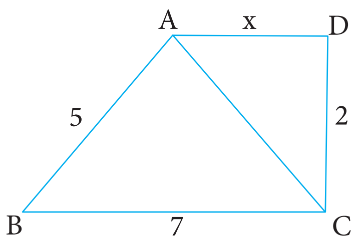
a) 5cm, 12 cm, 15 cm **b)** 15 cm, 20 cm, 25 cm **c)** 14 cm, 6 cm, 10 cm

2-



Yandaki dörtgende verilenlere göre x'in alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerini bulunuz.

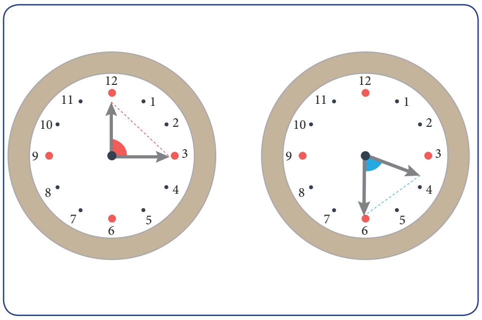
3-



Yandaki dörtgende [AC]'nin alacağı en küçük tam sayı değerine göre x'in alacağı en büyük tam sayı değeri kaçtır?

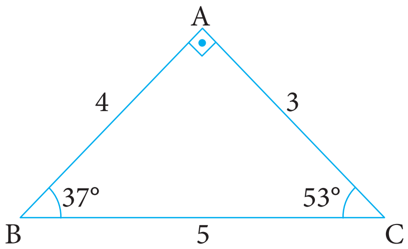
Üçgenin Açı ve Kenarları Arasındaki İlişkiler

Yandaki saat görsellerinde akrep ile yelkovanı üçgeninin iki kenarı kabul edelim.



Saatlerde oluşan üçgenlerdeki üçüncü kenar ile buna karşılık gelen açı arasındaki ilişki nasıldır? Düşününüz.

Örnek



Yanda verilen ABC üçgeninin kenarları ile bunlara karşılık gelen açıları arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

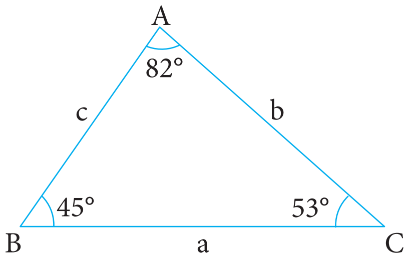
$\widehat{ABC}$ de 90° ye 5 br, 53° ye 4 br, 37° ye 3 br karşılık gelmektedir. Açılar ile bunlara karşılık gelen kenar uzunluklarını sıralayalım.

$$\begin{array}{ccccc} 90^\circ & > & 53^\circ & > & 37^\circ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 \text{ br} & > & 4 \text{ br} & > & 3 \text{ br} \end{array}$$

BİLGİ KUTUSU

Bir üçgende büyük açının karşısında uzun kenar, küçük açının karşısında kısa kenar bulunur.

Örnek



Yandaki $\widehat{ABC}$ de kenar uzunluklarını büyükten küçüğe sıralayalım.

Çözüm

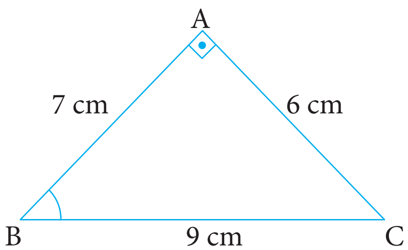
ABC üçgeninde açı ölçüleri arasındaki sıralama

$82° > 53° > 45°$ şeklindedir.

Açı ile açıya karşılık gelen kenar doğru orantılı olacağından

$a > c > b$ olur.

Örnek



Yandaki $\widehat{ABC}$'nin açı ölçüleri arasındaki sıralamayı bulalım.

Çözüm

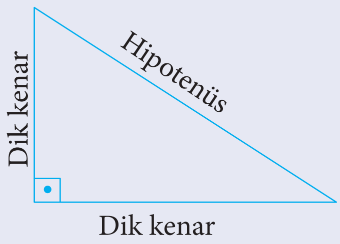
ABC üçgeninde kenar uzunlukları arasındaki sıralama

$|BC| > |AB| > |AC|$ şeklindedir.

Uzun kenara büyük açı karşılık geleceğinden

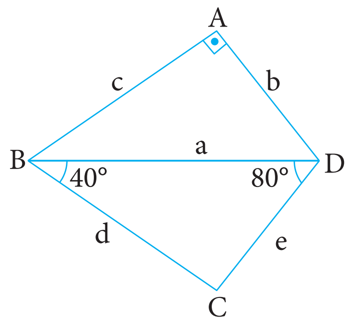
$m(\widehat{A}) > m(\widehat{C}) > (\widehat{B})$ olur.

BİLGİ KUTUSU



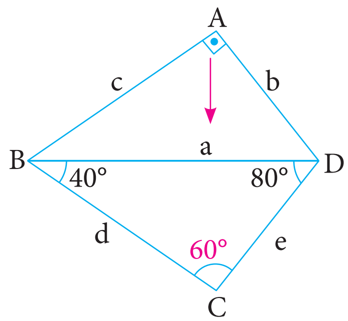
Dik üçgende en büyük iç açı 90° olduğundan, bu açıya karşılık gelen kenar hipotenüs en uzun kenardır.

Örnek



Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde en uzun kenarı bulalım.

Çözüm



ABC dik üçgeninde hipotenüs en uzun kenardır.

BCD üçgeninde

$$40° + 80° + m(\widehat{C}) = 180°$$

$$m(\widehat{C}) = 180° - 120°$$

$$m(\widehat{C}) = 60° \text{ olur.}$$

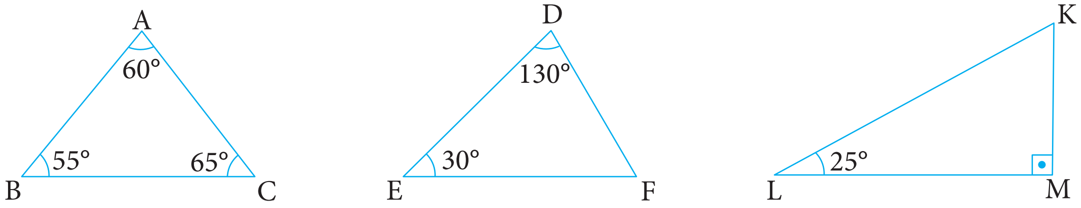
BCD üçgeninde iç açıların ölçüleri ile kenarlar arasındaki sıralama

$$\begin{array}{ccccc} 80° & > & 60° & > & 40° \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ d & > & a & > & e \end{array}$$ şeklindedir.

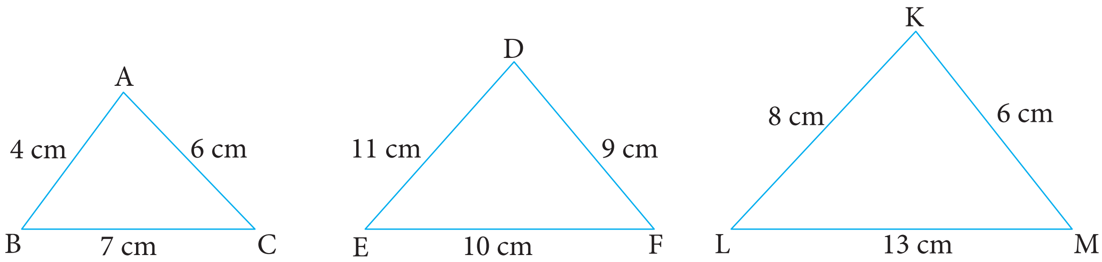
Dikkat edilirse ABCD dörtgeninde en uzun kenarın d olduğu görülür.

ALIŞTIRMALAR

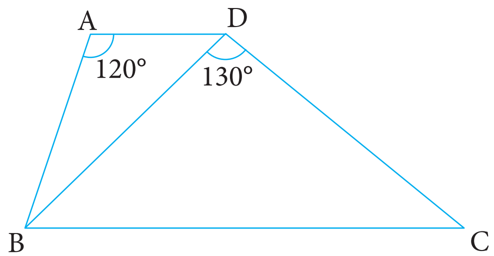
1- **Aşağıdaki üçgenlerde kenar uzunlukları arasındaki sıralamayı yapınız.**

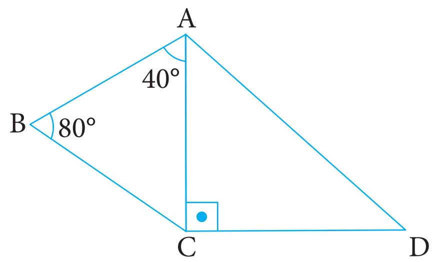


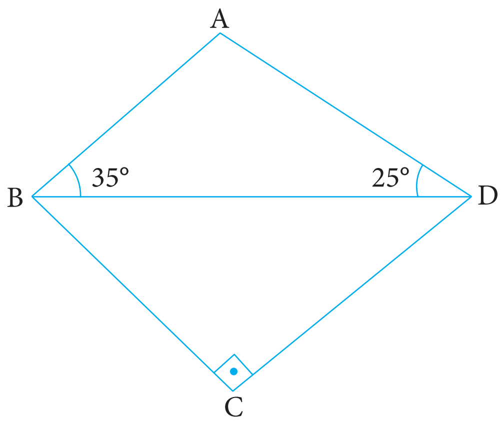
2- **Aşağıdaki üçgenlerde açı ölçüleri arasındaki sıralamayı yapınız.**

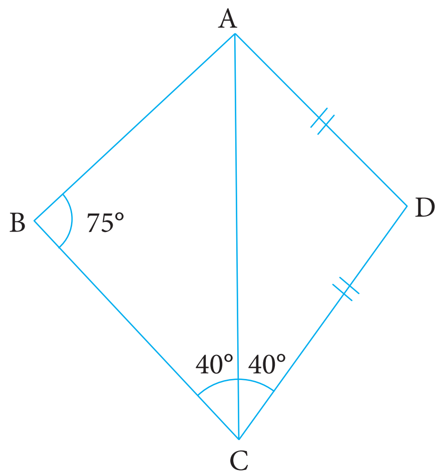


3- **Aşağıdaki dörtgenlerde en uzun kenarı bulunuz.**









Üçgen Çizimleri

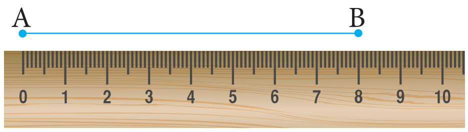
Evin çatısını yapan usta, üçgenin hangi elemanlarını kullanarak bu çatıyı yapmış olabilir? Düşününüz.

Örnek

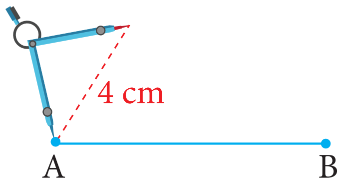
Kenar uzunluğu |AB| = 8 cm, |BC| = 5 cm ve |AC| = 4 cm olan $\widehat{ABC}$ ni pergel ve cetvel yardımıyla çizelim.

Çözüm

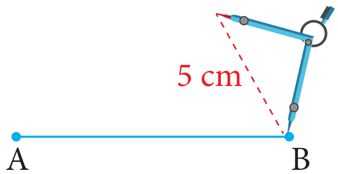
1. Cetvel ile [AB]'nı çizelim.



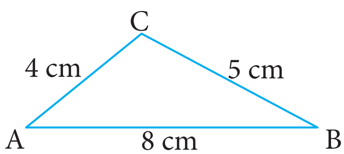
2. Pergel ile A merkezli 4 cm yarıçaplı bir yay çizelim.



3. Pergel ile B merkezli 5 cm yarıçaplı bir yay çizelim.



4. Cetvel yardımıyla [AC] ve [BC]'ni çizelim ve $\widehat{ABC}$ ni oluşturalım.



BİLGİ KUTUSU

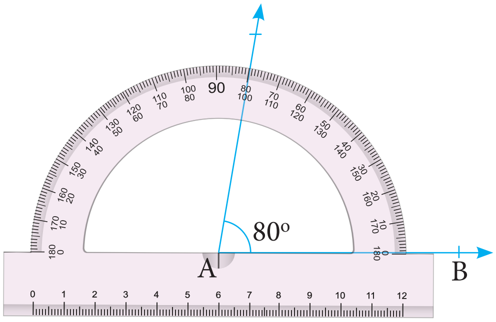
Üç kenarının uzunluğu bilinen bir üçgen, pergel ve cetvel yardımıyla çizilebilir.

Örnek

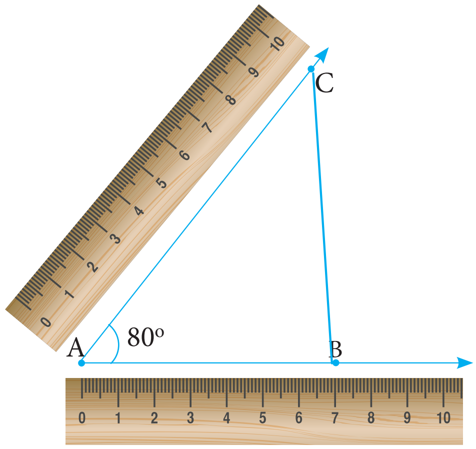
$m(\widehat{BAC}) = 80°$, $|AB| = 7$ cm, $|AC| = 10$ cm olacak şelde $\widehat{ABC}$’ni çizelim.

Çözüm

1. Açıölçer yardımıyla köşesi A noktası olan 80° lik bir açı çizelim.



2. Cetvel yardımıyla şeklin üzerine $|AB| = 7$ cm ve $|AC| = 10$ cm olacak şekilde [AB] ve [AC]’nı çizelim. B ve C yi birleştirip [BC]'nı çizelim Verilen ölçülere göre $\widehat{ABC}$’ni çizmiş oluruz.



BİLGİ KUTUSU

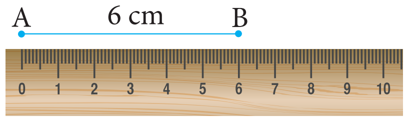
Bir açısının ölçüsü ve bu açıyı oluşturan kenarlarının uzunlukları verilen bir üçgen, açıölçer ve cetvel yardımıyla çizilebilir.

Örnek

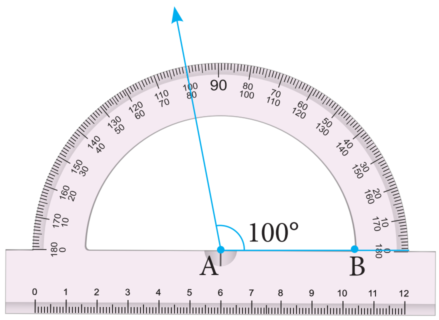
$m(\widehat{ABC}) = 60°$, $m(\widehat{BAC}) = 100°$ ve $|AB| = 6$ cm olacak şekilde $\widehat{ABC}$’ni çizelim.

Çözüm

1. Cetvel yardımıyla |AB| = 6 cm olacak şekilde [AB]'nı çizelim.

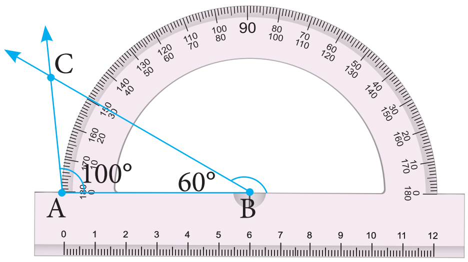


2. Açıölçer yardımıyla başlangıç noktası A köşesi olan 100° lik açı çizelim.



3. Açıölçer yardımıyla başlangıç noktası B köşesi olan 60° lik açı çizelim

   Verilen ölçüleri göre ABC'ni çizmiş oluruz.



BİLGİ KUTUSU

Herhangi iki açısı ve bu iki açı arasındaki kenar uzunluğu verilen bir üçgen, açıölçer ve cetvel yardımıyla çizilebilir.

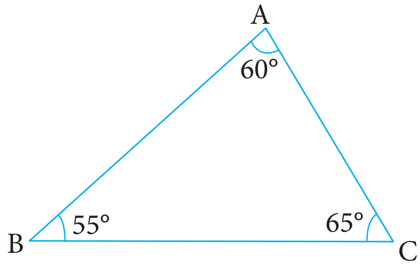
Örnek

$m(\widehat{ABC}) = 55°$, $m(\widehat{BCA}) = 65°$ ve $|AC| = 10$ cm olacak şekilde $\widehat{ABC}$ 'ni çizelim.

Çözüm

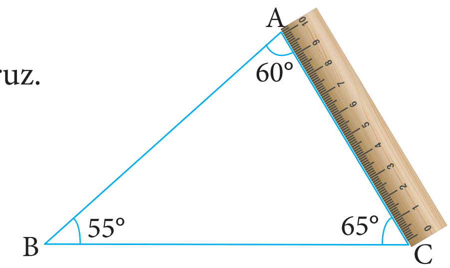
1. Üçgenin iç açıları

$$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{BAC}) = 180°$$
$$55 + 65 + m(\widehat{BAC}) = 180°$$
$$m(\widehat{BAC}) = 180° - 120°$$
$$m(\widehat{BAC}) = 60° \text{ olur.}$$



Açıölçer yardımıyla iç açıları 55°, 65° ve 60° olan üçgen çizelim.

2. Cetvel yardımıyla $|AC| = 10$ cm olan $[AC]$'nı çizelim. Verilen ölçülere göre $\widehat{ABC}$ 'ni çizmiş oluruz.



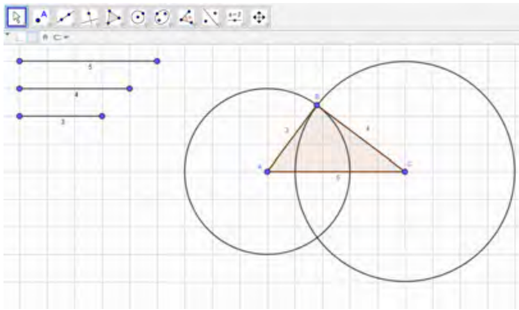
BİLGİ KUTUSU

Bir kenar uzunluğu ve iki açısının ölçüsü bilinen bir üçgen, açıölçer ve cetvel yardımıyla çizilebilir.

Örnek

GeoGebra programı yardımıyla kenar uzunlukları 3 br, 4 br, ve 5 br olan bir $\widehat{ABC}$ çizelim.

Çözüm



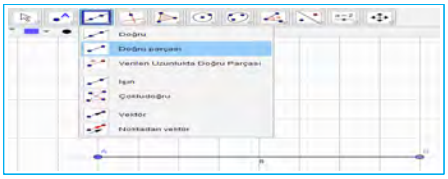
- İlk olarak üstten 6. menüden merkez ve yarıçapla "Çember" aracı ile $|AB| = 3$ br yarıçaplı ve B merkezli bir çember çizelim.
- İkinci olarak $|CD| = 4$ br yarıçaplı ve C merkezli bir çember çizelim.
- Üstten ikinci menüden "Kesiştir" aracı ile çemberlerin kesişim noktası A köşesini bulalım.
- "Çokgen çizim" aracı ile $\widehat{ABC}$'ni çizelim.

Örnek

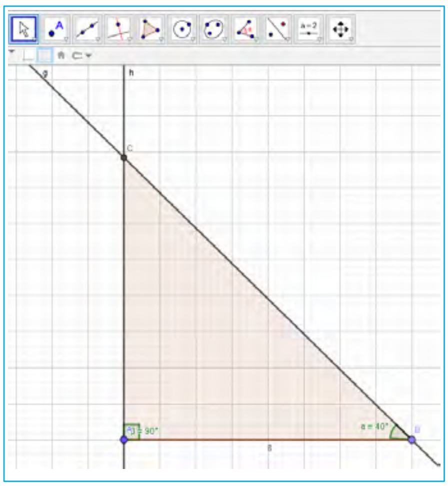
$m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{B}) = 40°$ ve $|AB| = 8$ br olan üçgeni GeoGebra programı yardımıyla çizelim.

Çözüm

1. 3. menüden "Doğru parçası" aracı ile 8 br'lik [AB] 'nı çizelim.



2. 8. menüden "Açı" aracı ile A ve B köşelerine tıklayarak derecelerden birini 40° diğerini 90° girelim ve oluşan noktaları 2. menüde "Doğru çizim" aracı ile birleştirelim.



3. 2. menüde "Kesiştir" aracı ile kesiştiği noktayı bulalım. "Yazım" aracı ile bu noktayı "C" olarak girelim.
4. 5. menüden "Çokgen" aracı ile A, B ve C noktalarını seçerek $\widehat{ABC}$ 'ni oluşturalım.

ALIŞTIRMALAR

1- Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenleri cetvel ve pergel yardımıyla çiziniz.

I. $a = 4$ cm
$b = 4$ cm
$c = 7$ cm

II. $a = 9$ cm
$b = 3$ cm
$c = 7$ cm

III. $a = 12$ cm
$b = 10$ cm
$c = 8$ cm

2- Aşağıda verilen ölçülere uygun üçgenleri cetvel ve açıölçer yardımıyla çiziniz.

I. $m(\widehat{B}) = 70°$
$|AB| = 8$ cm
$|BC| = 10$ cm

II. $m(\widehat{A}) = 110°$
$|AB| = 4$ cm
$|AC| = 8$ cm

III. $m(\widehat{C}) = 85°$
$|AC| = 12$ cm
$|BC| = 14$ cm

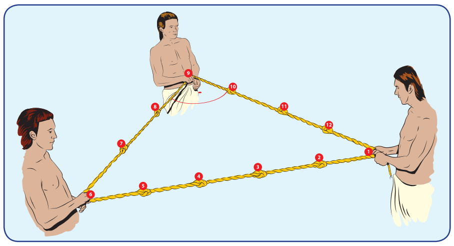
3- Aşağıda verilen ölçülere uygun üçgenleri cetvel ve açıölçer yardımıyla çiziniz.

I. $m(\widehat{A}) = 45°$
$m(\widehat{B}) = 75°$
$|AB| = 10$ cm

II. $m(\widehat{B}) = 80°$
$m(\widehat{C}) = 90°$
$|BC| = 15$ cm

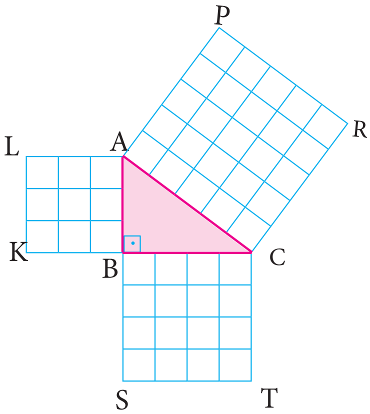
III. $m(\widehat{A}) = 120°$
$m(\widehat{C}) = 30°$
$|AC| = 6$ cm

Pisagor Bağıntısı



Mısır'da Nil Nehri'nin bahar aylarında taşması nedeniyle arazi sınırları sürekli değişiyor ve yeniden belirleniyordu. Mısırlılar her yıl karşılaştıkları bu sorun için bazı yöntemler geliştirdiler.Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir. Bu bağıntının ilk kez kimin tarafından kullanıldığı bilinmemekle beraber Pisagor tarafından ispat edildiği düşünülmektedir. Siz de etrafınızdaki dik üçgen şeklindeki nesneleri inceleyiniz. Kenarları arasındaki ilişkiyi düşününüz.

Örnek



Yandaki şekilde kenar uzunlukları 3 br, 4 br ve 5 br olan kareler ABC dik üçgenini oluşturmaktadır. Dik üçgen ile karelerin arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

$|AB| = 3$ br ve KBAL karesinin alanı $3 \cdot 3 = 9$ br^2 dir.

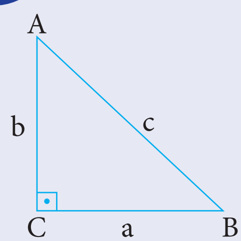
$|BC| = 4$ br ve STCB karesinin alanı $4 \cdot 4 = 16$ br^2 dir.

$|AC| = 5$ br ve ACRP karesinin alanı $5 \cdot 5 = 25$ br^2 dir.

Üçgenin dik kenarlarına ait olan karelerin alanları toplamı, [AC]'nin uzunluğuna ait olan karenin alanına eşittir.

$3^2 + 4^2 = 5^2$

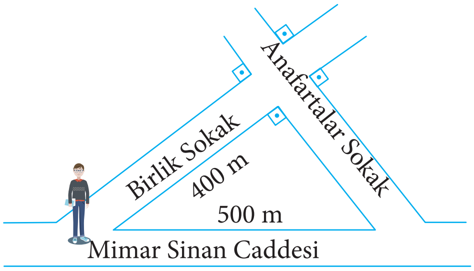
BİLGİ KUTUSU



Dik üçgende 90°lik açının karşısındaki kenara **hipotenüs** denir. Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir. Bu bağıntıya **pisagor bağıntısı** denir.

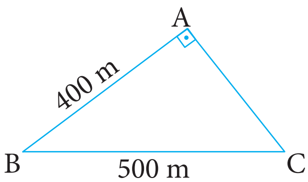
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Örnek



Şekildeki Birlik Sokak ile Mimar Sinan Caddesi'nin köşesinden yürümeye başlayan kişi Birlik Sokak ve Anafartalar Sokak'tan geçerek tekrar Mimar Sinan Caddesi'ne gidecektir. Birlik Sokak'ın uzunluğu 400 m Mimar Sinan Caddesi'nin şekildeki bölümü 500 m ise bu kişinin yürüdüğü toplam mesafeyi bulalım.

Çözüm



Şekle ait geometrik çizimi yapıp soruda verilen uzunlukları üzerine yazalım. [AB] Birlik Sokak'ı, [AC] Anafartalar Sokak'ı, [BC] Mimar Sinan Caddesi'ni temsil etmek üzere Pisagor Bağıntısını uygulayalım.

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

$$(400)^2 + x^2 = (500)^2$$

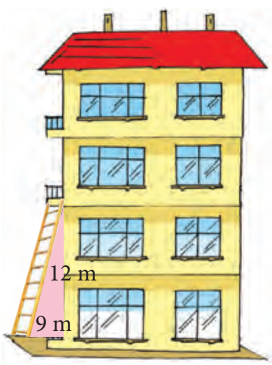
$$160000 + x^2 = 250000$$

$$x^2 = 90000$$

$$x = 300 \text{ m}$$

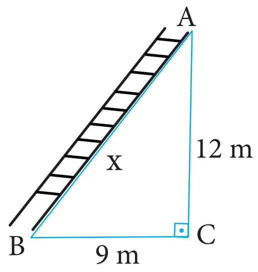
Birlik Sokak + Anafartalar Sokak = 400 m + 300 m = 700 m bulunur.

Örnek



Binaya 9 m mesafeden yerleştirilen merdiven ile 12 m yükseklikteki balkona tırmanılacaktır. Merdivenin uzunluğunu bulalım.

Çözüm



Şekle ait geometrik çizimi yapalım. ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısını uygulayalım.

$$x^2 = 9^2 + 12^2$$

$$x^2 = 81 + 144$$

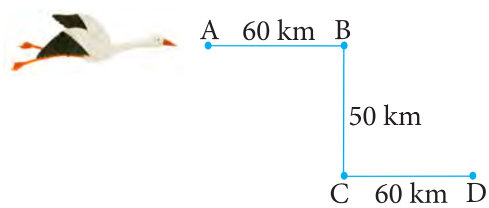
$$x^2 = 225$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{225}$$

$$x = 15 \text{ m}$$

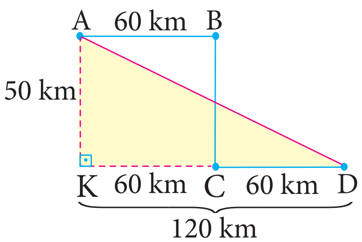
Merdivenin uzunluğu 15 m bulunur.

Örnek



A şehrinden uçmaya başlayan leylek göç yolundaki B ve C şehirlerine uğrayarak D şehrine gidiyor. Leylek A şehrinden D şehrine direkt gidecek olsaydı alacağı en kısa mesafeyi bulalım.

Çözüm



Elde ettiğimiz AKD dik üçgeninde Pisagor bağıntısını uygulayalım.

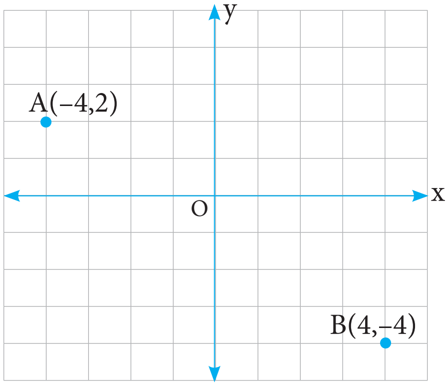
$$50^2 + 120^2 = |AD|^2$$

$$2500 + 14400 = |AD|^2$$

$|AD|^2 = 16900$ (Her iki tarafın karekökünü alalım.)

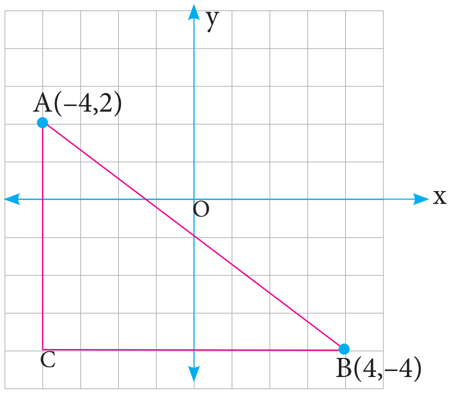
$|AD| = 130$ km bulunur.

Örnek

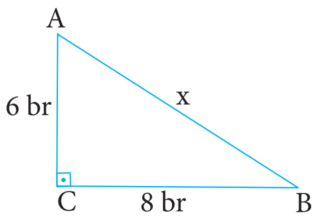


Yandaki koordinat sisteminde verilen A ve B noktaları arasındaki uzaklığın kaç br olduğunu bulalım.

Çözüm



A ve B noktaları arasındaki uzaklığı Pisagor bağıntısından faydalanarak bulalım.



$x^2 = 6^2 + 8^2$

$x^2 = 36 + 64$

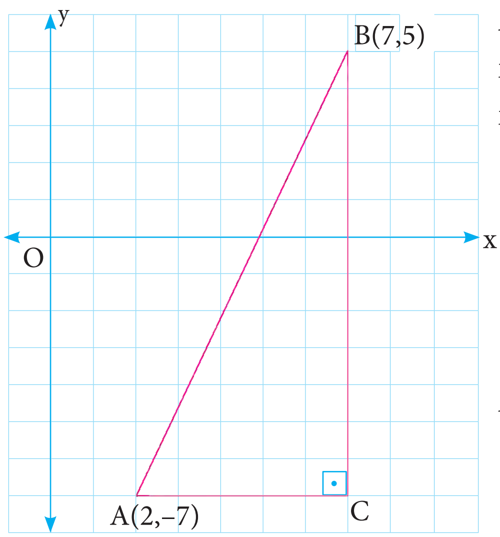
$x^2 = 100$

$x = 10$ br olur.

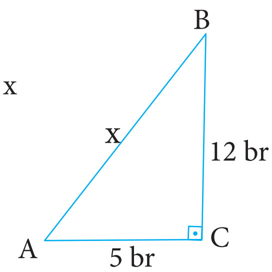
Örnek

Koordinat sisteminde A(2,–7) ve B(7,5) noktaları arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm



A(2,–7) ve B(7,5) noktalarını koordinat sisteminde gösterelim. Elde ettiğimiz ACB dik üçgeninde Pisagor bağıntısını uygulayalım.



$x^2 = 5^2 + 12^2$

$x^2 = 25 + 144$

$x^2 = 169$

(Her iki tarafın karekökünü alalım.)

$x = 13$ br olur.

Örnek

Kenar uzunlukları 8 cm, 15 cm ve 17 cm olarak verilen bir üçgenin dik üçgen olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

Pisagor bağıntısından yararlanarak 8 cm, 15 cm ve 17 cm nin dik üçgenin kenar uzunlukları olup olmadığını bulalım.

Pisagor bağıntısında kısa kenarların uzunluklarının kareler toplamı en uzun kenarın uzunluğunun karesine eşit olmalıdır.

$8^2 + 15^2 = 17^2$

$64 + 225 = 289$

$289 = 289$ olduğundan verilen üçgen dik üçgendir.

Örnek

Kenar uzunlukları $2\sqrt{5}$ birim, $4\sqrt{5}$ birim ve $3\sqrt{5}$ birim olarak verilen bir üçgenin dik üçgen olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

Pisagor bağıntısında kısa kenarların uzunluklarının kareleri toplamı en uzun kenarın uzunluğunun karesine eşit olmalıdır.

$(2\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 = (4\sqrt{5})^2$

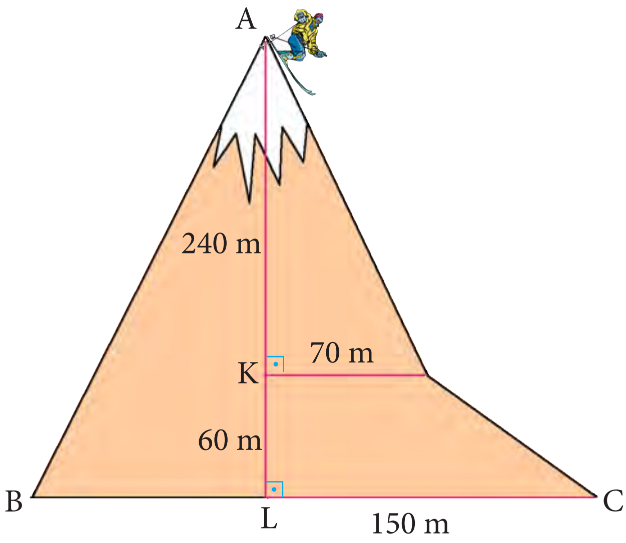
$20 + 45 = 80$

$65 \neq 80$

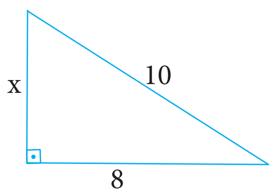
Sonuçlar eşit olmadığından verilen üçgen dik üçgen değildir.

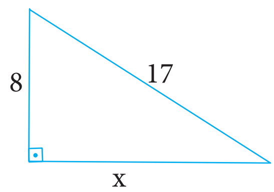
ALIŞTIRMALAR

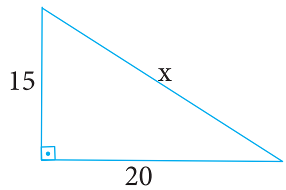
1. **Dağın zirvesinden kayakla önce B noktasına sonra C noktasına inecek olan kişinin kaydığı toplam mesafeyi bulunuz.**

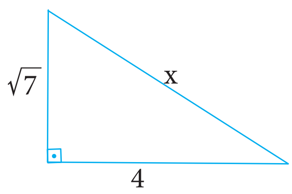


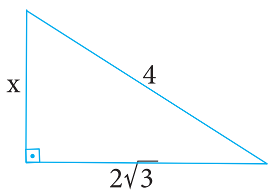
2. **Aşağıdaki dik üçgenlerin verilmeyen kenar uzunluklarını bulunuz.**

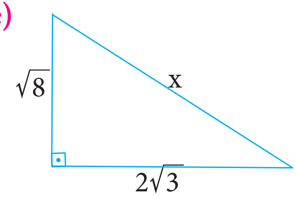
a)


b)


c)


ç)


d)


e)


3. **Aşağıda koordinatları verilen noktaların arasındaki uzaklığı Pisagor bağıntısından yararlanarak bulunuz.**

a) A(–3,1), B(4,25)

b) A(2,–4), B(–1,0)

c) A(5,0), B(0,12)

ç) A(–12,16), B(0,0)

4. **Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenlerin dik üçgen olup olmadığını bulunuz.**

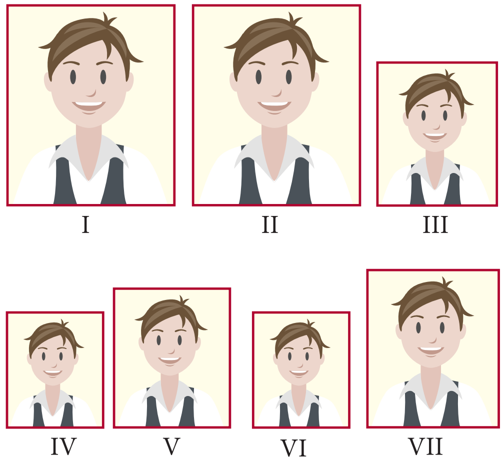
I. $a = 8$ cm, $b = 16$ cm, $c = 10$ cm

II. $a = \sqrt{5}$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3$ cm

III. $a = 2\sqrt{5}$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3\sqrt{5}$ cm

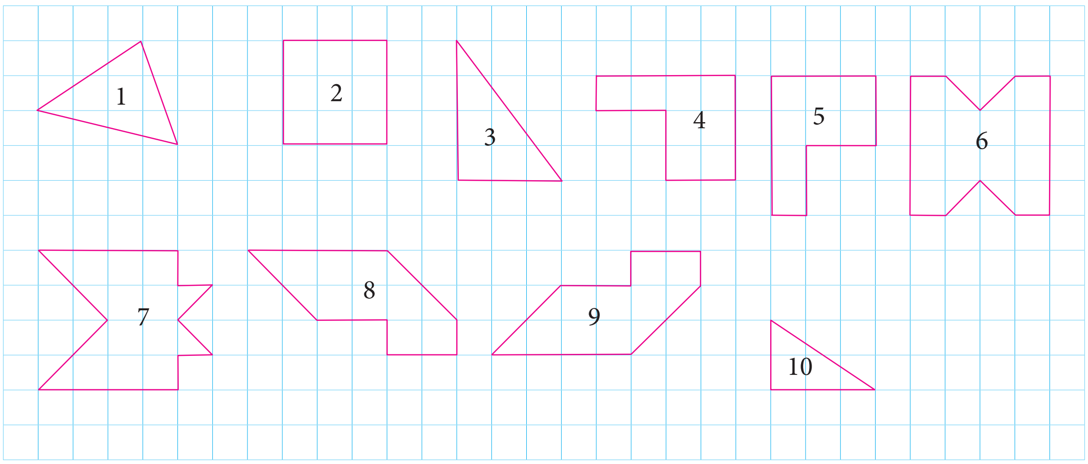
EŞLİK VE BENZERLİK

Yanda farklı boyutlarda fotoğraflar verilmiştir Hangilerinin benzer ya da eş olduğunu bulunuz.



Örnek

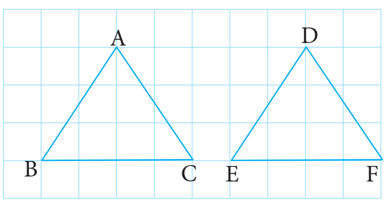
Aşağıda verilen şekillerden eş olanları belirleyelim.



Çözüm

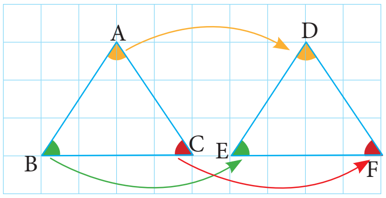
Verilen şekiller içerisinde 4 ile 5 in, 8 ve 9 un eş olduğu görülür.

Örnek



Kareli zeminde verilen üçgenleri inceleyerek karşılaştıralım.

Çözüm



Karşılaştırma yaptığımızda

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ ve

$|AB| = |DE|$

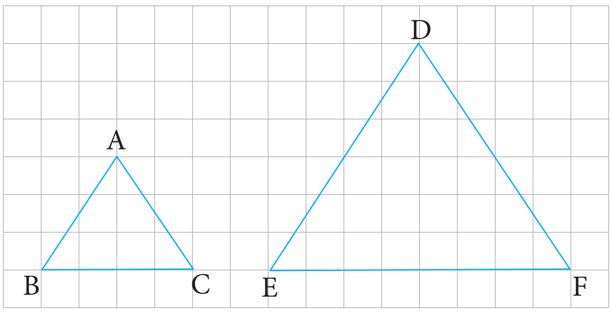
$|BC| = |EF|$

$|AC| = |DF|$ olduğu görülür. Bu üçgenler benzerdir.

BİLGİ KUTUSU

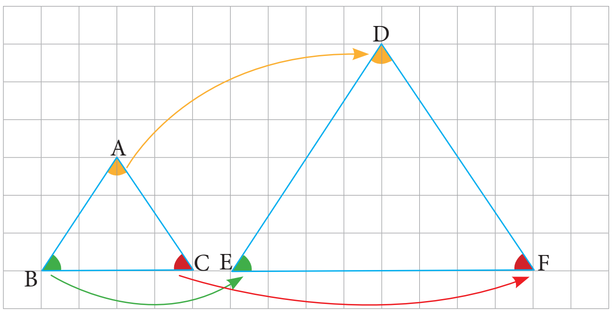
Eş çokgenlerde karşılıklı kenar uzunlukları ile karşılıklı açıların ölçüleri eşittir. Eş çokgenler "≅"sembolü ile gösterilir.

Örnek



Kareli zeminde verilen, üçgenleri inceleyerek karşılaştıralım.

Çözüm



Karşılaştırma yaptığımızda

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ ve

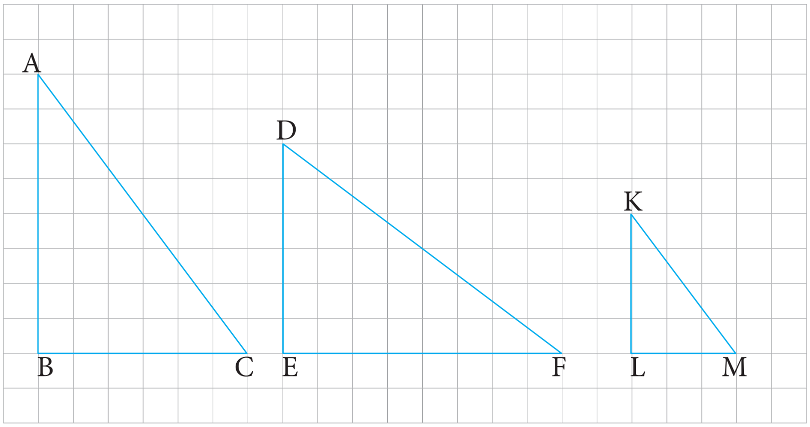
$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$ olduğu görülür. Bu üçgenler benzerdir.

BİLGİ KUTUSU

Benzer üçgenlerde karşılıklı kenar uzunlukları orantılı, karşılıklı açı ölçüleri eşittir. Benzer çokgenler "~" sembolü ile gösterilir.

Örnek

Kareli zeminde verilen üçgenleri inceleyerek eş ya da benzer olanlarını belirleyelim.



Çözüm

$\overset{\frown}{ABC}$ ile $\overset{\frown}{DEF}$ 'ni karşılaştırdığımızda

$\dfrac{|AB|}{|EF|} = \dfrac{|BC|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = 1$ orantısını yazabiliriz. Bu durumda bu kenarlara karşılık gelen açılar birbirine eşit olur.

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{F}),\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}),\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$

$\overset{\frown}{ABC}$ ile $\overset{\frown}{FED}$ eş üçgenlerdir. $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{FED}$ şeklinde gösterilir. $\overset{\frown}{ABC}$ ile $\overset{\frown}{KLM}$ 'ni karşılaştırdığımızda

$\widehat{A}$ ile $\widehat{K}$ 'nin, $\widehat{B}$ ile $\widehat{L}$'nin, $\widehat{C}$ ile $\widehat{M}$'nin eş olduğu görülür.

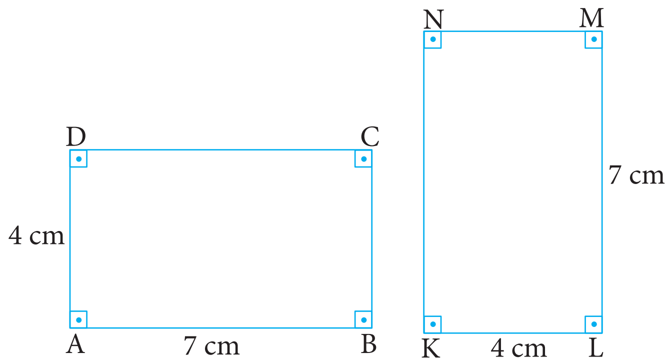
Kenarları arasında da $\dfrac{|AB|}{|KL|} = \dfrac{|BC|}{|LM|} = \dfrac{|AC|}{|KM|} = 2$ orantısı vardır.

$\overset{\frown}{ABC}$ ile $\overset{\frown}{KLM}$ benzer üçgenlerdir. $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{KLM}$ şeklinde gösterilir.

BİLGİ KUTUSU

Benzer üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları arasındaki orana **benzerlik oranı** denir. Eş çokgenlerin benzerlik oranı **1**'dir. Eş çokgenler aynı zamanda benzerlik oranı 1 olan çokgenlerdir. Benzer çokgenler eş çokgenler olmak zorunda değildir.

Örnek



Yanda verilen ABCD dikdörtgeni ile KLMN dikdörtgeninin eş olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm

ABCD ve KLMN dikdörtgenlerinin bütün iç açıları 90° dir.

$|AD| = |KL| = 4$ cm   Bu iki çokgen eştir.

$|AB| = |LM| = 7$ cm   ABCD ≅ LMNK şeklinde gösterilir.

$|BC| = |MN| = 4$ cm

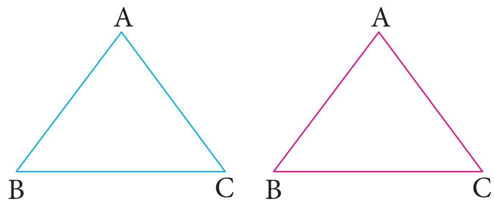
$|CD| = |NK| = 7$ cm

Örnek

Geogebra programı ile birbirine eş şekiller oluşturalım.

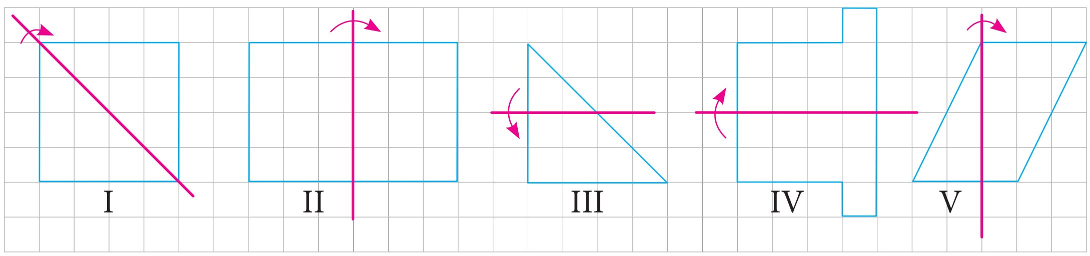
Çözüm

1. Üstten 5. menüden "Çokgen" aracı ile üçgen oluşturalım.
2. Üstten 1. menüden "Taşı" aracı ile tıklayarak üçgenimizi seçelim.
3. "Düzenle" menüsünden "Kopyala" ve "Yapıştır" araçlarını kullanarak üçgenimize eş bir üçgen oluşturalım.



Örnek

Aşağıdaki çokgenleri kırmızı doğru boyunca ikiye katladığımızda hangilerinde eş çokgenler oluşabileceğini bulalım.



Çözüm

I. şekli doğru boyunca katladığımızda birbirine eş iki üçgen oluşur.

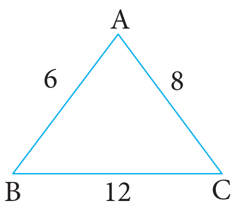
II. şekli doğru boyunca katladığımızda birbirine eş iki dikdörtgen oluşur.

III. şekli doğru boyunca katladığımızda bir üçgen ile bir dörtgen oluşur.

IV. şekli doğru boyunca katladığımızda birbirine eş iki çokgen oluşur.

V. şekli doğru boyunca katladığımızda bir üçgen ile bir dörtgen oluşur.

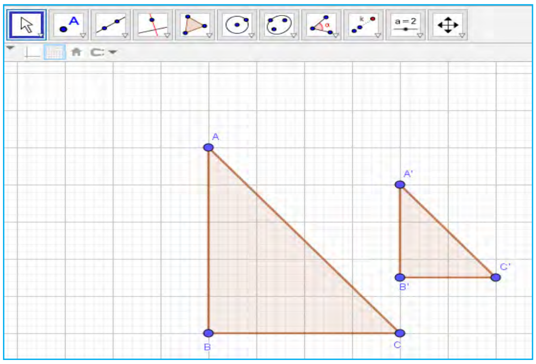
Örnek



Yanda verilen $\widehat{ABC}$'ne Geogebra programı yardımıyla benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ A'B'C' üçgeni oluşturalım.

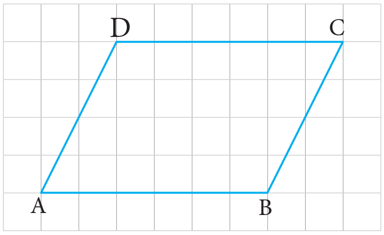
Çözüm

1. Üstten 5. menüyü kullanarak ABC üçgeni çizelim, üstten 9. menüde bulunan "Nesneyi noktadan genişlet" aracı yardımıyla üçgenimizi seçip üçgenimizin sağında bir noktaya tıklayalım.
2. Oluşan A'B'C' üçgeni ABC üçgeninin benzeridir ve benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ 'dir.



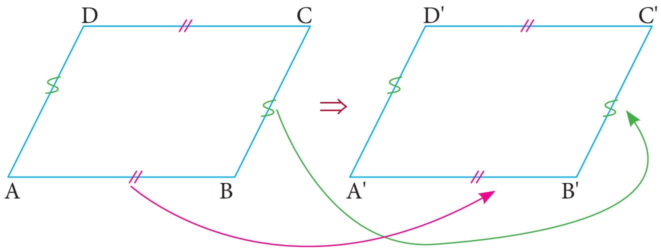
Örnek

Aşağıda verilen çokgene eş ve benzerlik oranı 2 olan çokgenler oluşturalım.



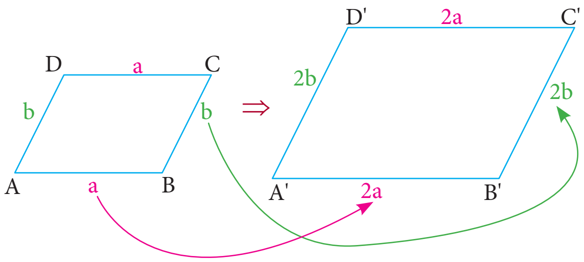
Çözüm

ABCD çokgenine eş çokgen çizebilmek için benzerlik oranı 1 olmalıdır.



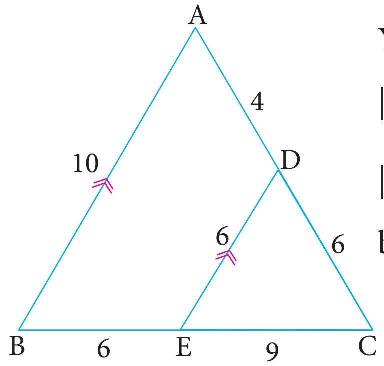
ABCD ≅ A'B'C'D'

ABCD çokgenine benzerlik oranı 2 olan çokgen çizelim.



ABCD ~ A'B'C'D'

Örnek

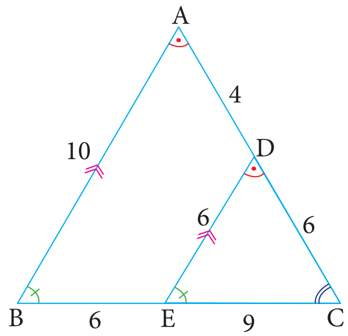


Yandaki şekilde [DE]//[AB]

|AB| = 10 cm, |AD| = 4 cm, |EC| = 9 cm ve

|BE| = |DE| = |DC| = 6 cm olduğuna göre $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEC}$'nin benzer olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm



Yöndeş açıların özelliğinden $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDC})$

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEC})$ olur. $\widehat{A}$ ortak olduğundan ABC ile DEC üçgenlerinde karşılıklı kenarların oranlarını inceleyelim.

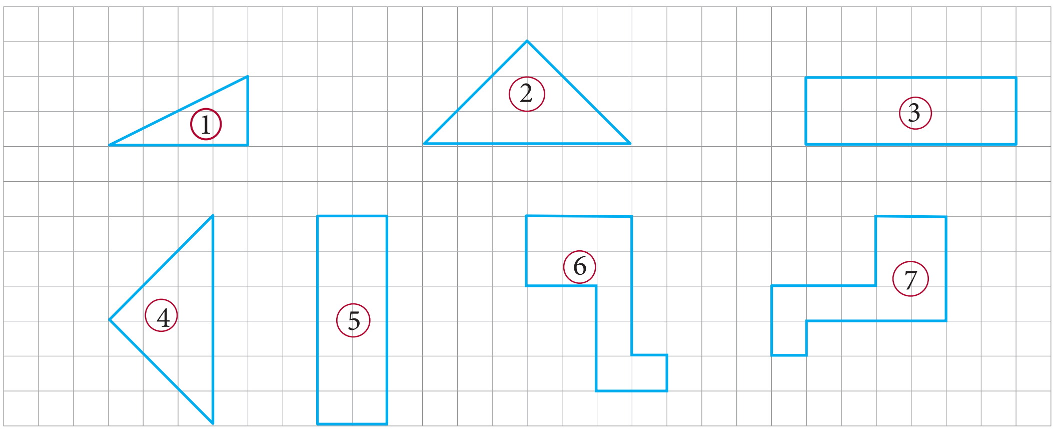
$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, $\frac{|BC|}{|EC|} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$, $\frac{|CA|}{|CD|} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$,

$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|} = \frac{|CA|}{|CD|} = \frac{5}{3}$ olur.

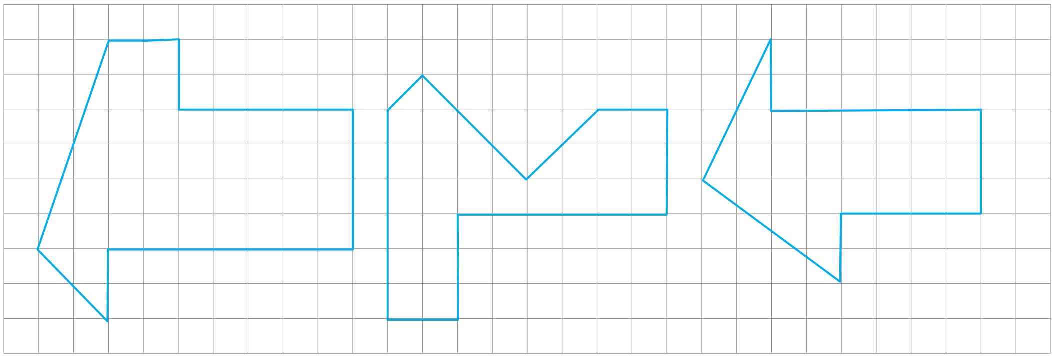
Bu durumda $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEC}$ dir. Benzerlik oranı ise $\frac{5}{3}$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki şekillerden eş olanları belirleyiniz.

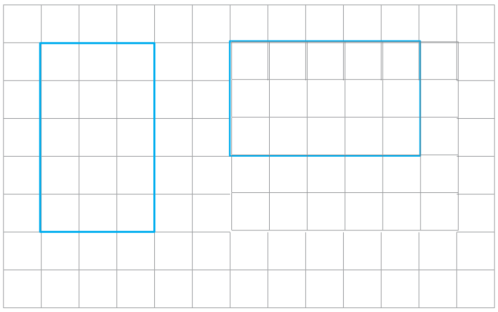


2. **Aşağıda verilen şekillere eş şekiller çiziniz.**



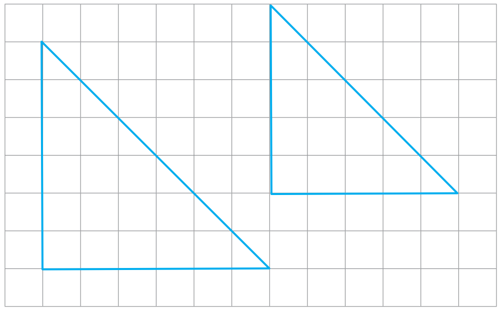
3. **Aşağıda verilen benzer çokgenlerin benzerlik oranlarını altlarındaki boşluklara yazınız.**

a)



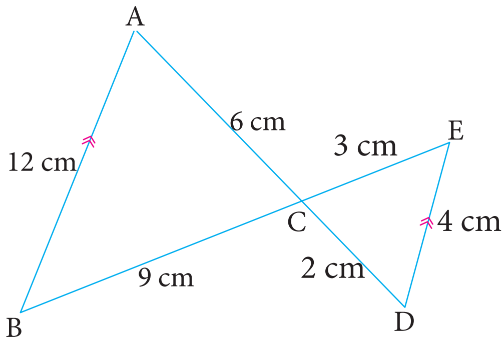
Benzerlik oranı: ....

b)



Benzerlik oranı: ....

4.



Yukarıdaki şekilde $\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{DEC}$ veriliyor. [AB]//[DE] **olduğuna göre aşağıda verilen bilgilerden hangileri doğrudur?**

I. $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEC}$

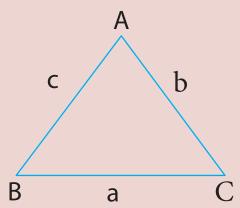
II. $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEC}$

III. Benzerlik oranı $\frac{1}{3}$ 'tür.

IV. $m(\widehat{A}) = m(\widehat{E}),\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$

ÖZET

- Üçgenin bir köşesi ile köşeye karşılık gelen kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçasına kenarortay denir. Üçgenin kenarortayları, üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişir.
- Üçgenin bir iç açısını ortadan iki eş açıya ayıran doğru parçasına açıortay denir. Üçgenin iç açıortayları, üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişir.
- Üçgenin bir köşesinden karşısındaki kenara veya kenarın uzantısına dik olarak çizilen doğru parçasına o kenara ait yükseklik denir. Dar açılı üçgende yükseklikler üçgenin iç bölgesinde, dik açılı üçgende dik açının köşesinde, geniş açılı üçgende ise üçgenin dış bölgesinde kesişir.
- Eşkenar üçgende kenarortay, açıortay ve yükseklik aynı doğru parçasıdır. İkizkenar üçgende eş olmayan kenara ait kenarortay bu kenara ait hem açıortaydır hem de yüksekliktir.
- Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay, hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.
- Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, diğer iki kenarın uzunluğunun farkının mutlak değerinden büyüktür.



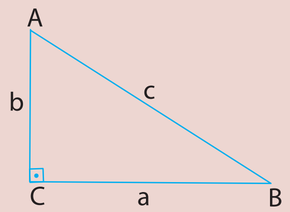
$|b - c| < a < b + c$

$|a - c| < b < a + c$

$|a - b| < c < a + b$

- Bir üçgende büyük açının karşısında uzun kenar, küçük açının karşısında kısa kenar bulunur.
- Dik üçgende 90° ye karşılık gelen kenar hipotenüs, en uzun kenardır.
- Üç kenarının uzunluğu bilinen bir üçgen pergel ve cetvel yardımıyla, bir açısının ölçüsü ve bu açıyı oluşturan kenarlarının uzunlukları verilen bir üçgen açıölçer ve cetvel yardımıyla, herhangi iki açısı ve bu iki açı arasındaki kenar uzunluğu verilen bir üçgen açıölçer ve cetvel yardımıyla, bir kenar uzunluğu ve iki açısının ölçüsü bilinen bir üçgen açıölçer ve cetvel yardımıyla çizilebilir.

- Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir. Bu bağıntıya Pisagor Bağıntısı denir.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

- Eş çokgenlerde karşılıklı kenar uzunlukları ile karşılıklı açılarının ölçüleri eşittir. Eş çokgenler "≅" sembolü ile gösterilir.
- Benzer çokgenlerde karşılıklı kenar uzunlukları orantılı, karşılıklı açı ölçüleri eşittir. Benzer çokgenler "~ " sembolü ile gösterilir.
- Benzer çokgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları arasındaki oranabenzerlik oranı denir. Eş çokgenlerin benzerlik oranı 1'dir.

5. ÜNİTE
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. **Aşağıda verilen bilgilerden hangisi <u>her zaman</u> doğrudur?**

A) Üçgende kenarortay bulunduğu açıyı iki eş parçaya böler.

B) Eşkenar üçgende kenarortay hem açıortay hem de yüksekliktir.

C) Geniş açılı üçgende kenarortayların kesim noktası üçgenin dış bölgesindedir.

D) Dik üçgende hipotenüse inen dik uzunluk hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

2. **Aşağıda verilen bilgilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?**

I. Eş üçgenler aynı zamanda benzer üçgenlerdir.

II. Benzer üçgenler aynı zamanda eş üçgenlerdir.

III. Bütün dik üçgenler benzerdir.

IV. Eş üçgenlerin benzerlik oranı 1'dir.

A) I - II B) II - III

C) I - IV D) I - II - IV

3. **Aşağıdakilerden hangisi bir üçgene ait kenar uzunlukları olabilir?**

A) a = 4 cm
b = 10 cm
c = 22 cm

B) a = 3 cm
b = 7 cm
c = 4 cm

C) a = 12 cm
b = 14 cm
c = 2 cm

D) a = 5 cm
b = 10 cm
c = 12 cm

HAYAT BOYU ÖĞRENME

4. **Aşağıdakilerden hangisi üçgen çizmek için yeterli <u>değildir</u>?**

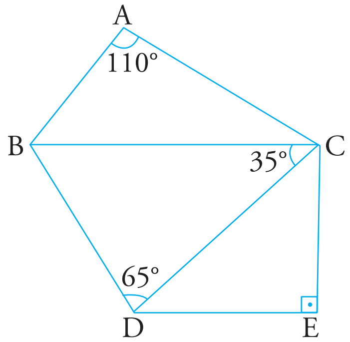
A) $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|AC| = 14$ cm

B) $m(\widehat{ABC}) = 80°$, $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 7$ cm

C) $m(\widehat{ABC}) = 45°$, $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 9$ cm

D) $m(\widehat{ABC}) = 80°$, $m(\widehat{BCA}) = 60°$, $|AB| = 14$ cm

5.



Yukarıda şekilde verilen

$m(\widehat{BAC}) = 110°$

$m(\widehat{BCD}) = 35°$

$m(\widehat{BDC}) = 65°$

$m(\widehat{CED}) = 90°$ ise en uzun kenar

aşağıdakilerden hangisidir?

A) [CD] B) [BC]

C) [BD] D) [AB]

6. **Aşağıdaki kenar uzunlukları verilen üçgenlerden hangisi bir dik üçgendir?**

A) 5 cm, 7 cm, 8 cm

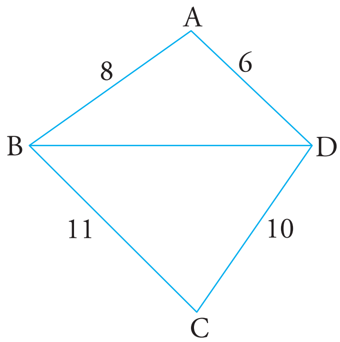
B) $5\sqrt{2}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm

C) 15 cm, 8 cm, 14 cm

D) 3 cm, 4 cm, 6 cm

HAYAT BOYU ÖĞRENME

7.



Yukarıdaki ABCD dörtgeninde [BD] 'nin alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

A) 10 B) 11

C) 12 D) 13

8. **Benzerlik oranı $\frac{1}{3}$ olan iki üçgenden birinin çevresi 30 cm olduğuna göre diğerinin çevre uzunluğu kaç cm olabilir?**

A) 10 B) 20

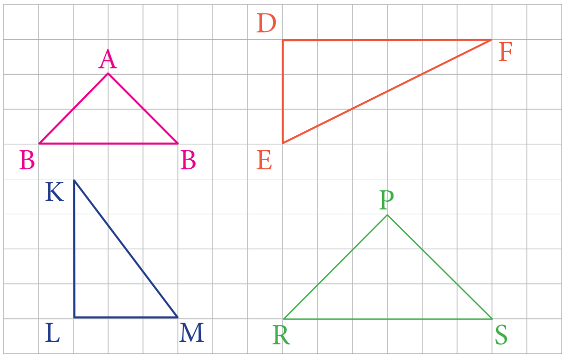
C) 30 D) 60

9. **Koordinat sisteminde A(–4, 8) ve B(5, –4) ile gösterilen noktalar arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.**

A) 15 B) 12

C) 9 D) 8

10.



Yukarıda verilen üçgenlerden hangi ikisi benzerdir?

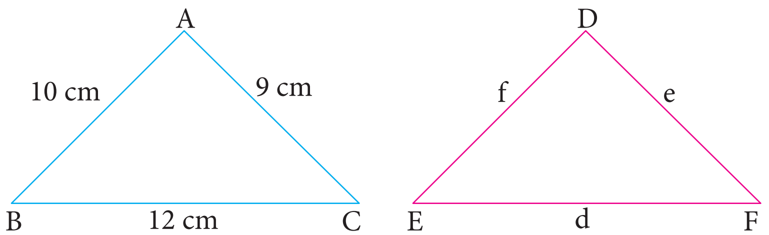
A) $\widehat{ABC} \sim \widehat{KLM}$

B) $\widehat{KLM} \sim \widehat{DEF}$

C) $\widehat{ABC} \sim \widehat{PRS}$

D) $\widehat{ABC} \sim \widehat{RSP}$

11.



Yukarıda verilen $\widehat{ABC} \cong \widehat{FDE}$ ve $|AB| = 10$ cm, $|BD| = 12$ cm ve $|AD| = 9$ cm olduğuna göre d, e ve f uzunlukları sırasıyla hangi seçenekte doğru verilmiştir?

A) 10 cm, 12 cm, 9 cm

B) 12 cm, 9 cm, 10 cm

C) 10 cm, 9 cm, 12 cm

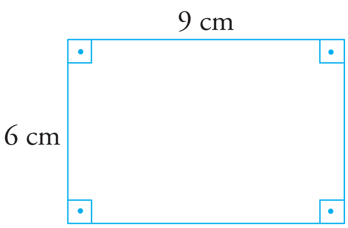
D) 9 cm, 10 cm, 12 cm

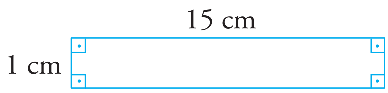
12. Aşağıdaki tabloda yeterli sayıda elemanı bilinen bir üçgenin çizilebilmesi için gerekli olan araç gereçler verilmiştir.

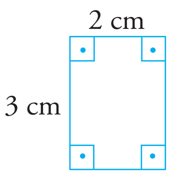
Hangi seçenekte verilen bilgiler <u>yanlıştır</u>?

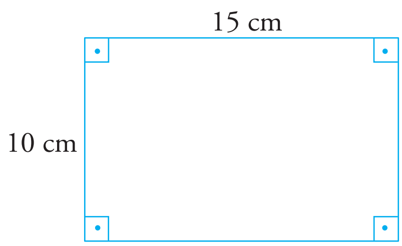
	Verilen Elemanlar	**Pergel**	**Cetvel**	**Açıölçer**
A)	a = 7 cm, b = 10 cm, c = 12 cm	✔	✔	
B)	$m(\widehat{A}) = 100°$, $\|AB\| = 9$ cm, $\|AC\| = 13$ cm		✔	✔
C)	$m(\widehat{ABC}) = 56°$, $m(\widehat{ACB}) = 90°$, $\|BC\| = 10$ cm		✔	✔
D)	$m(\widehat{DEF}) = 40°$, $m(\widehat{EDF}) = 50°$, $\|EF\| = 8$ cm	✔	✔	

13. Aşağıda verilen dikdörtgenlerden hangisi diğerlerinden farklıdır?

A)


B)


C)


D)


6. ÜNİTE
DÖNÜŞÜMLER VE GEOMETRİK CİSİMLER

ÜNİTE KONULARI

- DÖNÜŞÜM GEOMETRİSİ
- GEOMETRİK CİSİMLER

6. ÜNİTE

• DÖNÜŞÜM GEOMETRİSİ
• GEOMETRİK CİSİMLER

NELER ÖĞRENECEĞİZ ?

Bu ünitenin birinci bölümününde;

- Nokta, doğru parçası ve diğer şekillerin öteleme sonucundaki görüntülerini çizmeyi,
- Nokta doğru parçası ve diğer şekillerin yansıma sonucu oluşan görüntüsü oluşturmayı,
- Çokgenlerin öteleme ve yansımalar sonucunda ortaya çıkan görüntüsünü oluşturmayı öğreneceğiz.

Bu ünitenin ikinci bölümününde;

- Dik prizmaları tanımayı, temel elemanlarını belirlemeyi inşa etmeyi ve açınımını çizmeyi,
- Dik dairesel silindirin temel elemenlarını belirlemeyi, inşa etmeyi ve açınımını çizmeyi,
- Dik dairesel silindirin yüzey alanı bağıntısını oluşturmayı, ilgili problemleri çözmeyi,
- Dik dairesel silindirin hacim bağıntısını oluşturmayı, ilgili problemleri çözmeyi
- Dik piramidi tanıyıp temel elemanlarını belirlemeyi inşa etmeyi ve açınımını çizmeyi,
- Dik koniyi tanıyıp temel elemanlarını belirlemeyi, inşa etmeyi ve açınımını çizmeyi öğreneceğiz.

ANAHTAR KAVRAMLAR

- Yansıma
- Görüntü
- Yükseklik
- Pramit
- Prizma
- Öteleme
- Yüzey alanı
- Simetri doğrusu
- Silindir

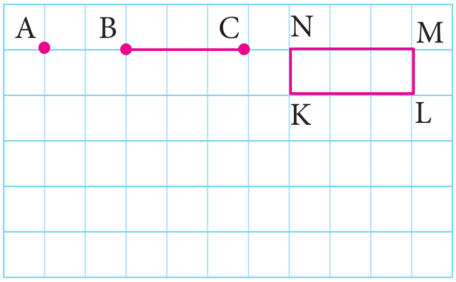
DÖNÜŞÜM GEOMETRİSİ

Öteleme

Yandaki Escher'in Drawing hands tablosunda bir şekil ve bu şeklin ötelenmiş hâllerini görüyoruz. Sizce şekil ile ötelemiş hâli arasında ne gibi benzerlik vardır? Düşününüz.

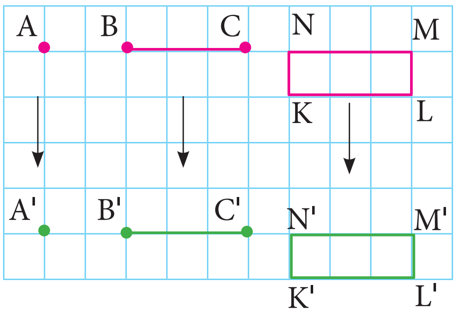
M.C. Escher, Drawing Hands (Çizen Eller)

Örnek



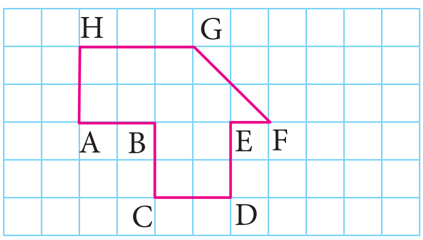
Yanda kareli zeminde verilen nokta doğru parçası ve dikdörtgenin 4 br aşağı ötelenmiş görüntülerini çizelim.

Çözüm



A noktasının 4 br aşağı ötelenmiş görüntüsü A' dür. [BC]'nin 4 br aşağıya ötelenmiş görüntüsü [B'C']'dir. KLMN dikdörtgenin köşe noktalarını 4 br aşağı öteleyip köşe noktalarını birleştirerek yeni görüntüyü elde edelim.

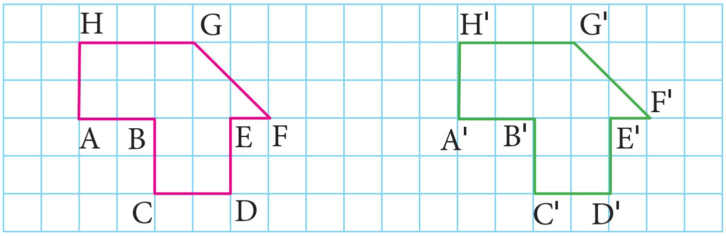
Örnek



Yanda kareli zeminde verilen şekli 10 birim sağa öteleyerek çizelim.

Çözüm

Şekilde verilen çokgenin köşe noktalarını kareli zemin üzerinde 10 birim sağa öteleyip köşe noktalarını birleştirerek yeni görüntüyü elde edelim.

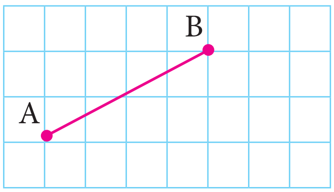


BİLGİ KUTUSU

Nokta, doğru parçası veya düzlemsel şekillerin sağa, sola, yukarı veya aşağı doğru hareket ettirilmesine **öteleme** denir.

Örnek

[AB]'nı aşağıda verilenlere göre öteleyelim.



a) 2 br sola

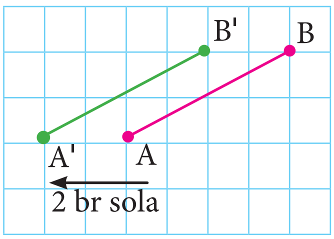
b) 3 br aşağı

c) 1 br yukarı

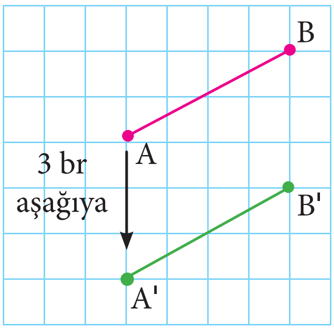
Çözüm

[AB]'nın A ve B noktalarını öteleyim. Ötelenmiş noktaları birleştirip son halini bulalım.

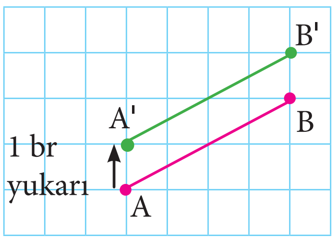
a)



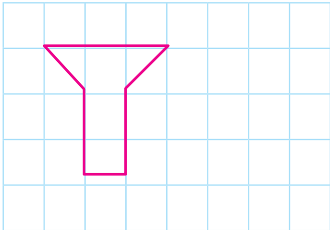
b)



c)

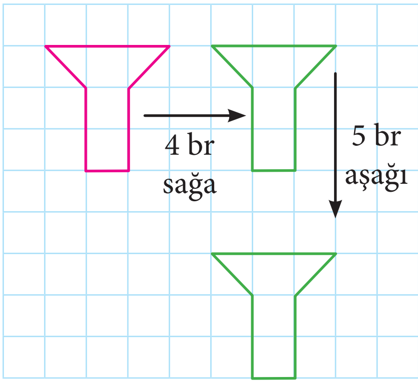


Örnek



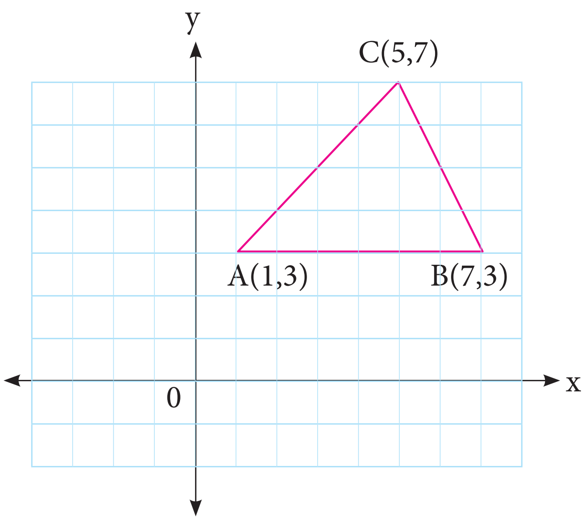
Yanda kareli zeminde verilen şekli 4 br sağa 5 br aşağı öteleyerek çizelim.

Çözüm



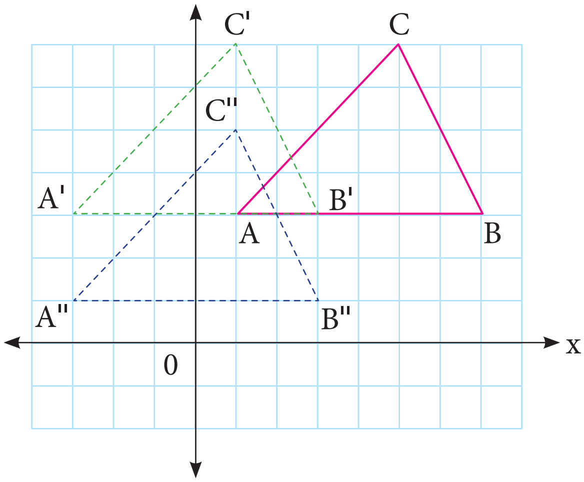
Önce şekle ait tüm köşe noktalarını 4 br sağa sonra da 5 br aşağıya öteleyelim.

Örnek



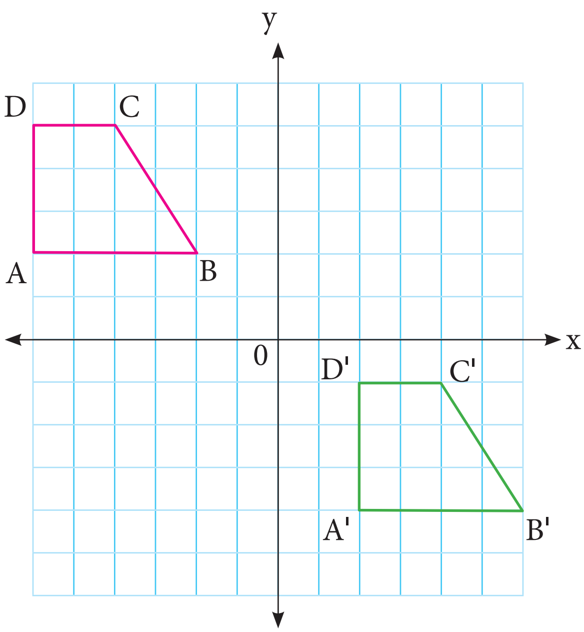
Yandaki koordinat sisteminde verilen $\widehat{ABC}$'ni 4 br sola ve 2 br aşağıya ötelenmesi ile elde edilen görüntüsünü bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$ nin 4 br sola ötelenmesi ile köşe noktaları A'(–3,3), B'(3,3), C'(1,7) olan $\widehat{A'B'C'}$ ni elde ederiz. $\widehat{A'B'C'}$ nin 2 birim aşağıya ötelenmesi ile köşe koordinatları A''(–3,1), B''(3,1), C''(2,5) olan $\widehat{A''B''C''}$ 'ni elde ederiz.

Örnek



Yandaki koordinat sisteminde verilen ABCD dörtgeninin ötelenmiş hâli A'B'C'D' dörtgenidir. Şekle hangi yön ve büyüklükte ötelemenin yapıldığını bulalım.

Çözüm

Şekil üzerinde bir nokta alalım. Örneğin A(−6, 2) noktasının ötelenmiş hâli A' (2, −4) tür.

A(−6, 2) ⟶ A'(2, −4)

2 – (−6) = 2 + 6 = 8 br sağa

−4 −2 = – 6 br aşağı

A noktasının 8 br sağa 6 br aşağıya ötelendiğini görüyoruz. Şekil üzerindeki her nokta aynı yön ve büyüklükte ötelendiğinde şekil 8 br sağa ve 6 br aşağıya ötelenmiştir.

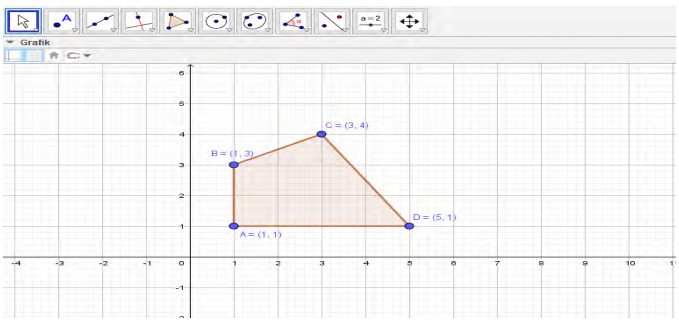
Dikkat edilirse şekil üzerindeki her bir nokta aynı yön ve büyüklükte hareket ettiğinde şekil ile görüntüsünün eş olduğunu görürüz.

Örnek

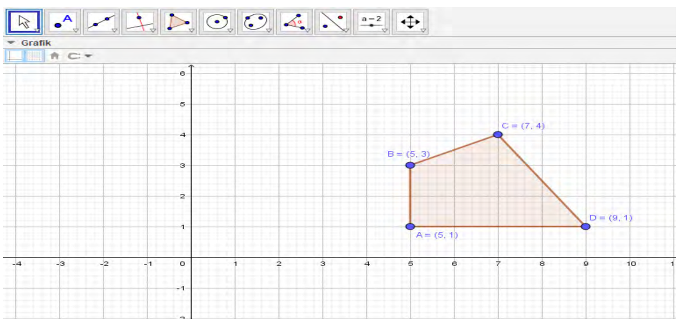
Geogebra programı yardımıyla bir çokgen çizip 4 birim sağa öteleyelim.

Çözüm

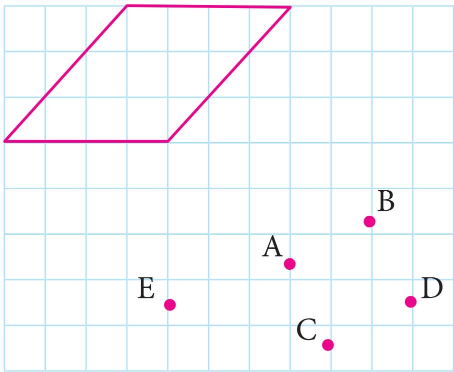
1. Üstten 5. menü "Çokgen Çizimi" aracı ile ABCD çokgenini A(1,1) noktasını gelecek şekilde çizelim.



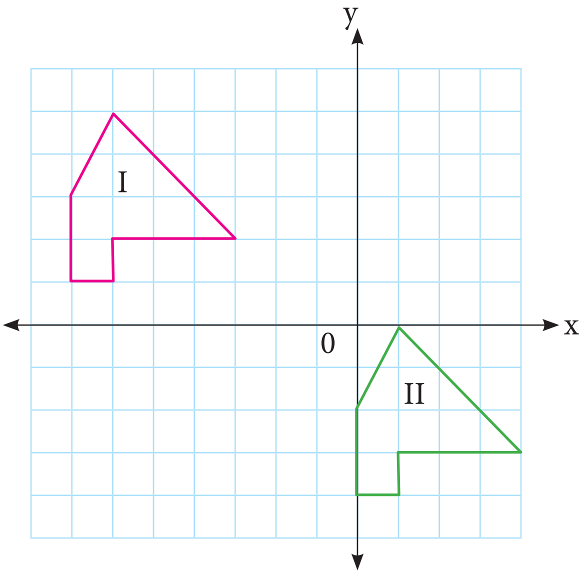
2. 1. Menü " Taşı" aracı ile dörtgeni 4 birim sağa öteleyelim.



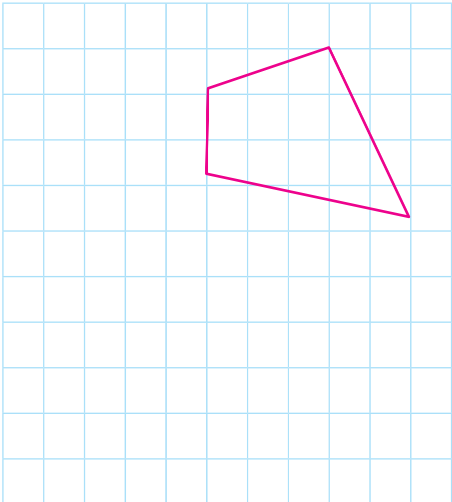
ALIŞTIRMALAR

1- 

Yanda kareli zeminde verilmiş A, B, C, D noktalarından hangisi ya da hangileri 4 br yukarıya 2 br sola ötelenirse şeklin üzerinde kalır?

2- 

Yanda koordinat sisteminde verilen I. şekil ötelenerek II. şekil elde edilmiştir. Yapılan ötelemeyi bulunuz.

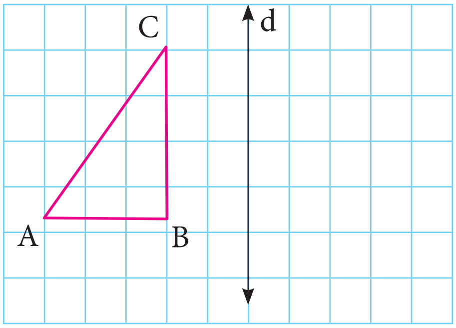
3- 

Yanda kareli zeminde verilen dörtgenin 3 br sola 5 br aşağıya ötelenmiş görüntüsünü bulunuz.

Yansıma

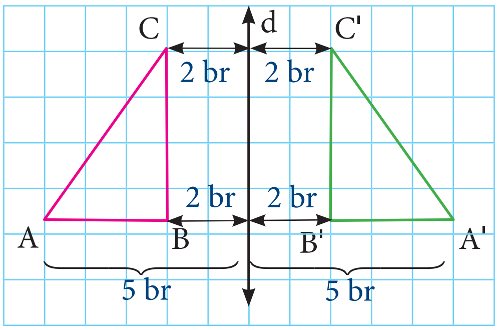
Yandaki görselde göl üzerinde dağ şeklinin yansımasını görüyoruz. Sizce şekil ile yansıması arasında ne gibi benzerlik vardır? Düşününüz.

Örnek



Yanda kareli kağıt üzerinde verilen ABC üçgeninin d doğrusuna göre yansımasını bulalım.

Çözüm



ABC üçgeninin köşe koordinatlarından d doğrusuna yandaki gibi dikmeler çizelim. Daha sonra dikmeler çizdiğimiz d doğrusu üzerindeki noktalara d doğrusunun diğer tarafından aynı uzunlukta dikmeler çizelim. Bu durumda elde ettiğimiz A', B' ve C' noktaları A, B ve C noktalarının d doğrusuna göre simetriği olan noktalardır. ABC üçgeninin d doğrusuna göre yansıması A' B' C' üçgenidir.

BİLGİ KUTUSU

Bir şeklin bir doğruya göre oluşan simetrisine şeklin **yansıması** denir. Şekil ile simetriği arasında bulunan doğruya ise **simetri doğrusu** denir. Yansımada şekil ile simetriği üzerindeki birbirine karşılık gelen noktalar simetri doğrusuna diktir ve aralarındaki uzaklık birbirine eşittir. Dolayısıyla şekil ile görüntüsü birbirine eştir.

Örnek

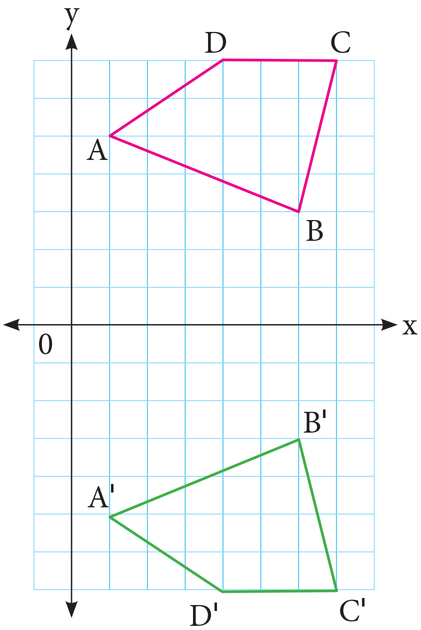
Köşe koordinatları A(1,5), B(6,3), C(7,7) ve D(4,7) olan ABCD dörtgeninin koordinat sisteminde

a) x eksenine göre

b) y eksenine göre yansımasını bulalım.

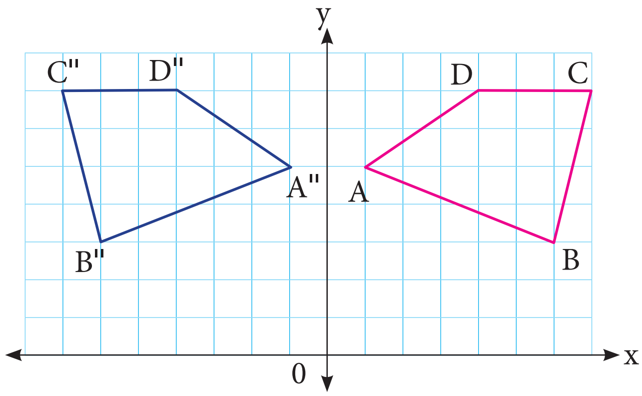
Çözüm

a)



ABCD dörtgeninin x eksenine göre yansıması A'B'C'D' dörtgenidir.

b)



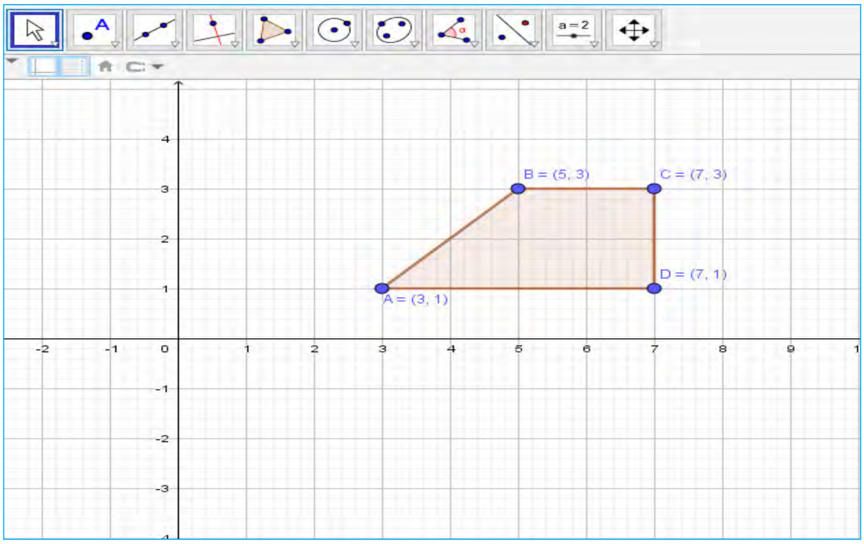
ABCD dörtgeninin y eksenine göre yansıması A"B"C"D" dörtgenidir.

Örnek

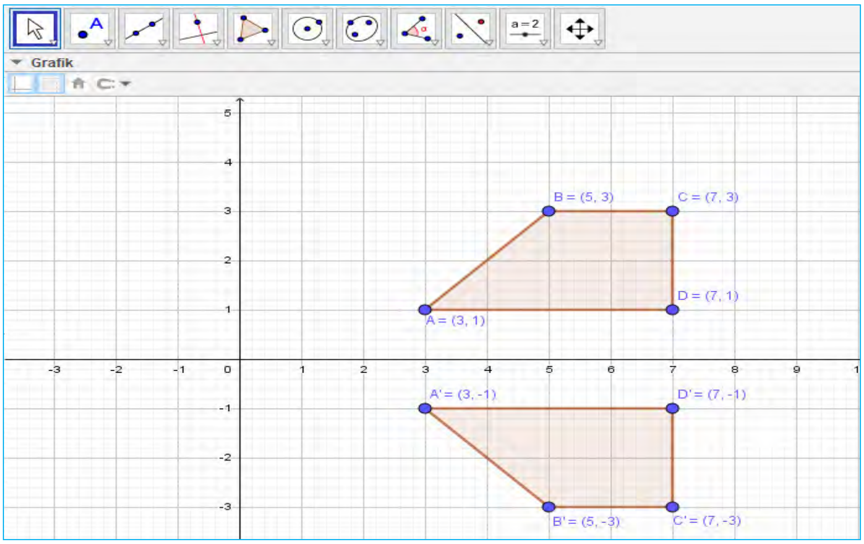
Geogebra programını kullanarak bir çokgen çizelim ve çizdiğimiz çokgeni yatay eksende yansıtalım.

Çözüm

1. Üstten 5. menü "Çokgen" aracı ile koordinat sisteminde bir çokgen oluşturalım.



2. Üstten 9. menüde bulunan "Doğrudan Yansıt" aracı ile çokgenin yansımasını oluşturalım.

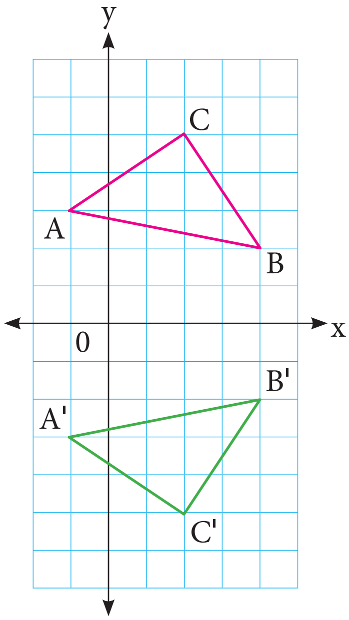


Örnek

Köşe koordinatları A(−1,3), B(4,2) ve C(2,5) olan ABC üçgeninin x eksenine göre yansımasını çizelim.

Çözüm

ABC üçgeninin x eksenine göre yansıması olan A'B'C'üçgeninin koordinatları aşağıdaki gibidir.



$$A(-1,3) \xrightarrow{\text{x eksenine göre}} A'(-1,-3)$$

$$B(4,2) \xrightarrow{\text{x eksenine göre}} B'(4,-2)$$

$$A(2,5) \xrightarrow{\text{x eksenine göre}} A'(2,-5)$$

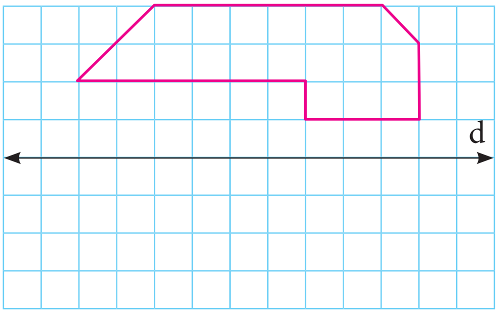
Dikkat edilirse A(x, y) noktasının x eksenine göre yansımasında y'nin işareti değişir x aynı kalır.

BİLGİ KUTUSU

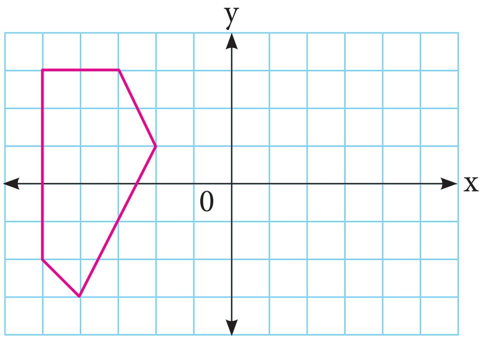
A(x,y) noktasının x eksenine göre yansıması A'(x,−y) olur.

A(x,y) noktasının y eksenine göre yansıması A'(−x,y) olur.

ALIŞTIRMALAR

1- 

Yandaki kareli zeminde verilen şeklin d doğrusuna göre yansımasını çiziniz.

2- 

Koordinat sisteminde verilen şeklin y eksenine göre yansımasını çiziniz.

3- **Aşağıda verilen noktaların x eksenine ve y eksenine göre yansımalarını bulunuz.**

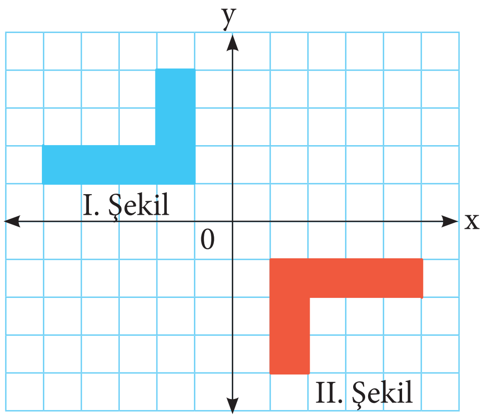
Nokta	x Eksenine Göre Yansıması	y Eksenine Göre Yansıması
(–3, –2)		
(5, –4)		
(–3, 1)		
(0, 0)		

Ardışık Öteleme ve Yansıma

Yandaki görselde şekiller arasındaki yansıma ve öteleme hareketlerinin nasıl yapıldığını bulmaya çalışınız.

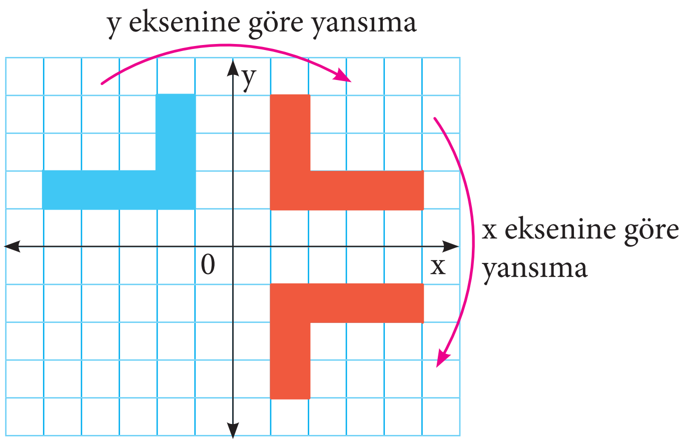
M.C. Escher, Two Birds (İki kuş)

Örnek

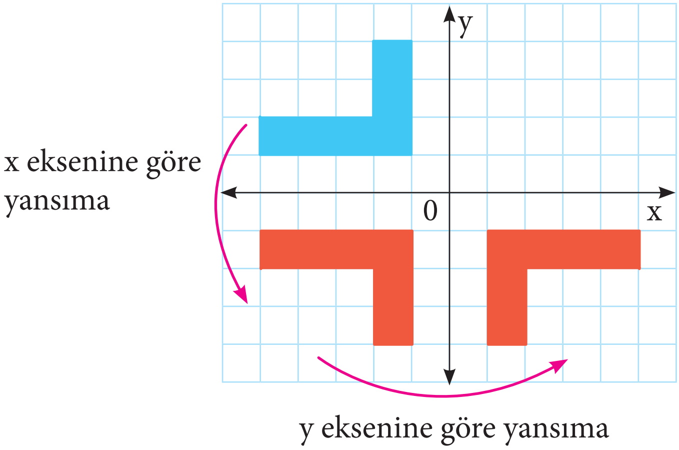


Koordinat sisteminde II. bölgede verilen 1. Şeklin görüntüsü IV. bölgedeki 2. Şekildir. Buna göre verilen şekle hangi işlemlerin yapıldığını bulalım.

Çözüm

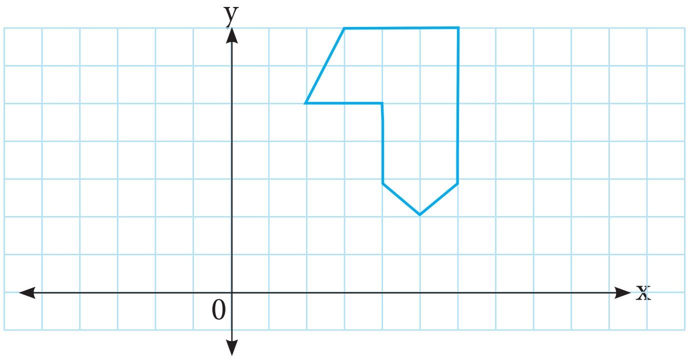


1. şeklin önce y eksenine göre sonra x eksenine göre yansımasını alırsak 2. şekil elde edilir.



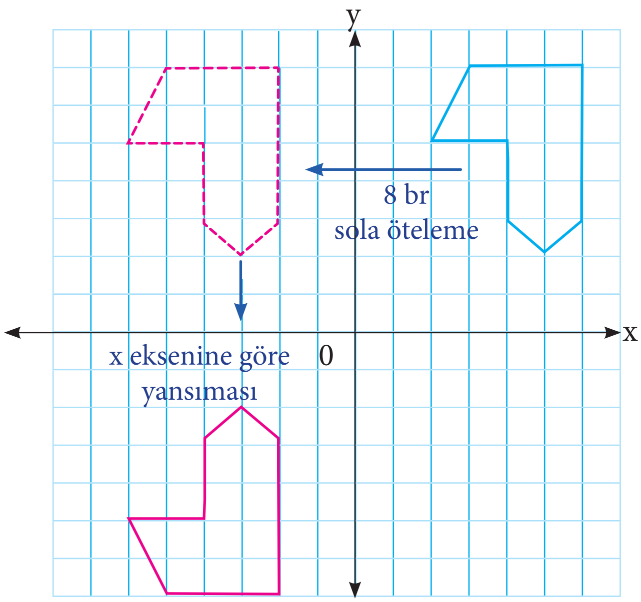
1. şeklin önce x eksenine göre sonra y eksenine göre yansımasını alırsak 2. şekli elde ederiz.

Örnek

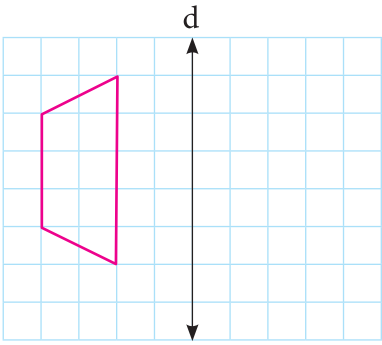


Yandaki koordinat sisteminde verilen şekli 8 br sola öteledikten sonra x eksenine göre yansımasını bulunuz.

Çözüm

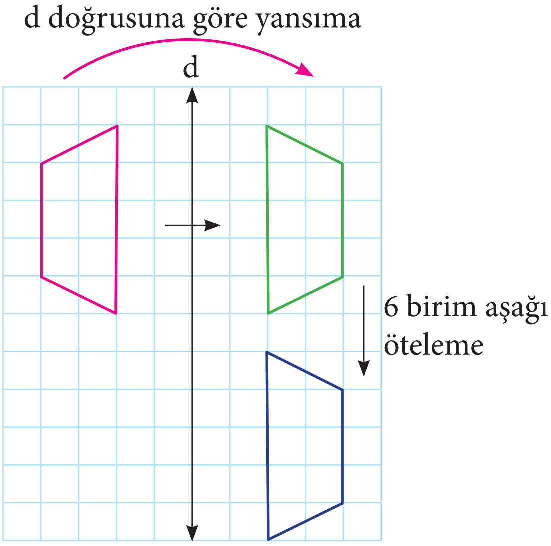


Örnek



Yandaki kareli zeminde verilen şekli önce d doğrusuna göre yansımasını alıp 6 birim aşağı öteleyelim.

Çözüm

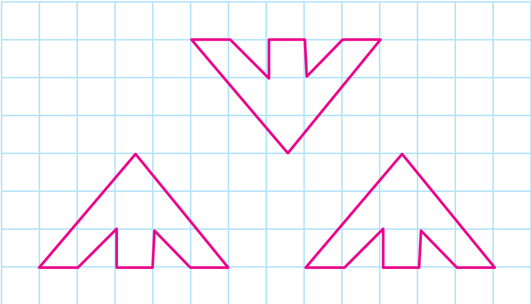


Önce şeklin d doğrusuna göre yansımasını bulalım. Sonra elde ettiğimiz görüntüyü 6 birim aşağı öteleyelim.

Örnek

Aşağıdaki desen ve motif örneklerinin nasıl oluştuğunu inceleyelim.

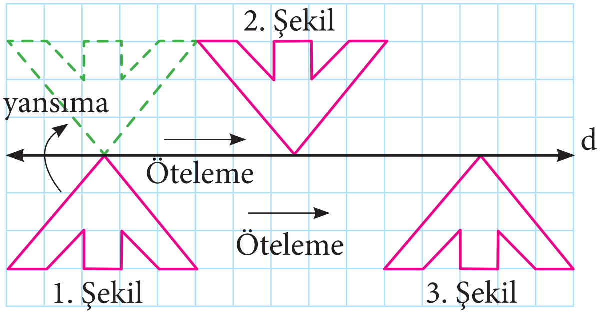
a)



b)

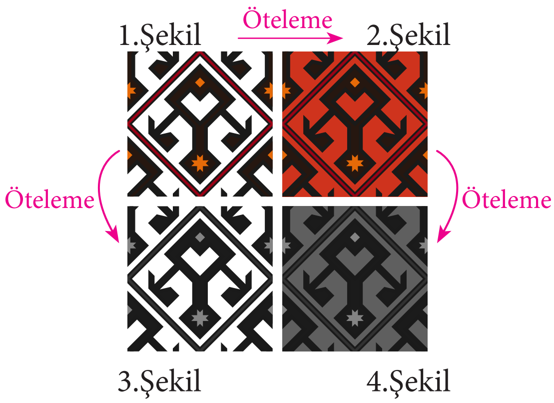
Çözüm

a)



Motif incelendiğinde 1. şeklin d doğrusuna göre yansımasını alalım. Daha sonra bu şeklin ötelenmesi ile 2. şekli elde edelim. 1. şeklin ötelemesi ile 3. şekli de elde edelim.

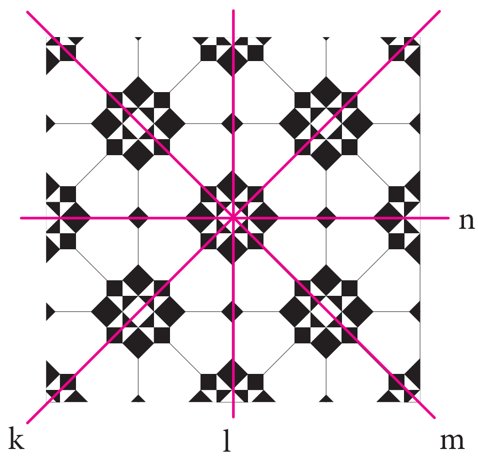
b)



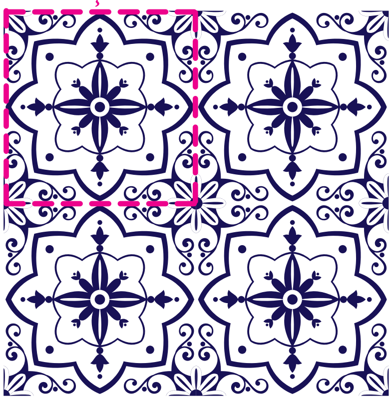
Deseni incelediğimizde 1. şeklin ötelenmesi ile 2. şekil, 3. şekil ve 4. şekil elde edilir.

Örnek

Aşağıda verilen çini ve seramik örnekleri inceleyelim.



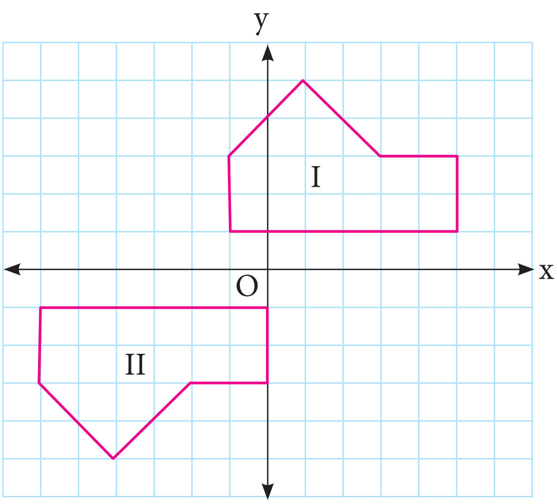
Kare şeklindeki çini örneğini incelediğimizde k, l, m veya n doğrularına göre simetrik olduğunu görüyoruz.



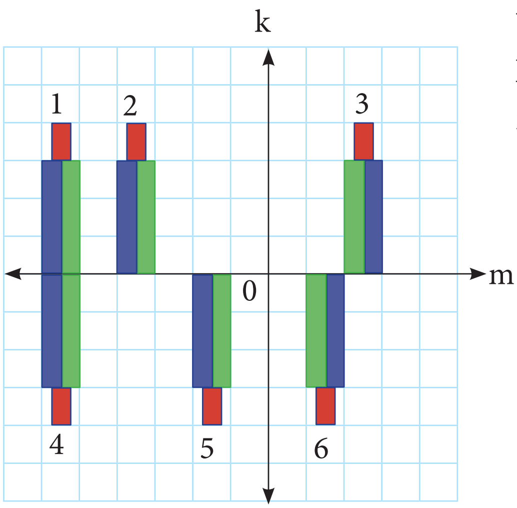
Kare şeklindeki seramik örneğini incelediğimizde 1. şeklin aşağı ve sağa ötelenerek tüm şeklin elde edildiğini görüyoruz.

ALIŞTIRMALAR

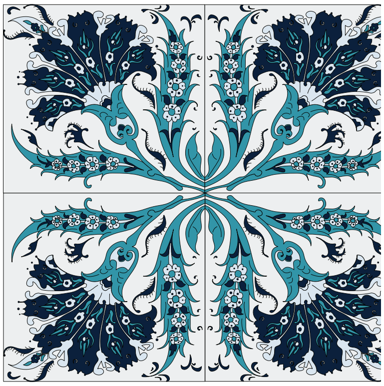
1- **Yandaki şekilde verilen koordinat sistemindeki I. şekli II. şekil konumuna getirmek için hangi dönüşüm işlemleri yapılmalıdır?**



2- **Yanda koordinat sisteminde verilen şekillerden hangileri birbirlerinin k ya da m doğrusuna göre yansımasıdır?**



3- **Aşağıdaki desenlerde hangi dönüşümler kullanılmış olabilir? Düşününüz.**

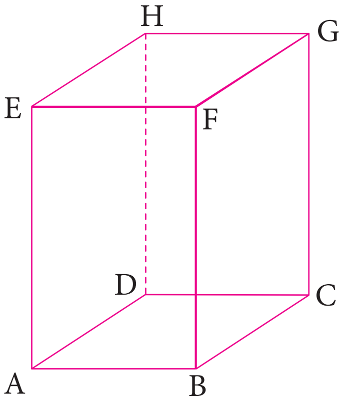


GEOMETRİK CİSİMLER

Günlük hayatta kullandığımız ya da etrafımızda olan geometrik cisimlerden esinlenerek yapılmış bir çok nesneden söz edebiliriz. Örneğin binalar, çatılar bardak, su borusu, Mısır piramidleri, dondurma külahı, huni vb. bunlardan sadece bir kaçıdır.

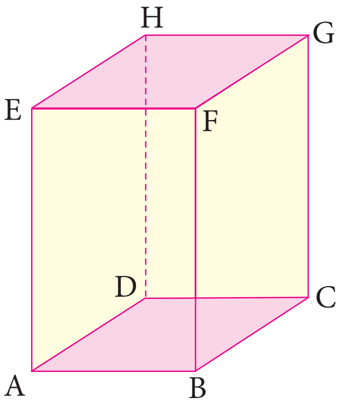
Sizde etrafınızda dik prizma, silindir piramit, koni gibi geometrik cisimlere örnekler gösteriniz.

Örnek



Yandaki dikdörtgen dik prizma modelinin temel elemanlarını belirleyerek yüzey açınımını çizelim.

Çözüm



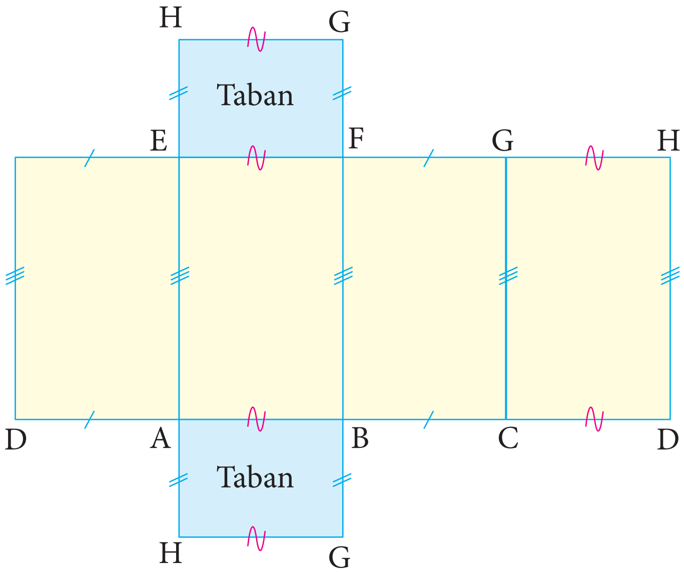
Dikdörtgen dik prizmanın temel elemanlarını inceleyelim. A, B, C, D, E, F, G ve H noktaları prizmanın köşe noktalarıdır. ABCD ve EFGH dikdörtgensel bölgeleri prizmanın tabanlarıdır. [AB], [BC], [CD], [DA], [AE], [BF], [CG], [DH], [EF], [FG], [GH] ve [HE] prizmanın ayrıtlarıdır.

ABFE, BCGF, CDHG ve ADHE dikdörtgensel bölgeler prizmanın yan yüzleridir.

[AE], [BF], [CG] ve [DH] prizmanın yüksekliğidir.

Dikdörtgen prizmanın 6 yüzü, 12 ayrıtı ve 8 köşesi vardır. Karşılıklı yüzleri birbirine paralel ve eşittir.

Dikdörtgen dik prizmanın açınımı şekildeki gibidir.

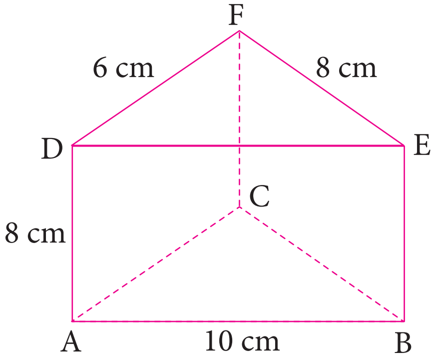


BİLGİ KUTUSU

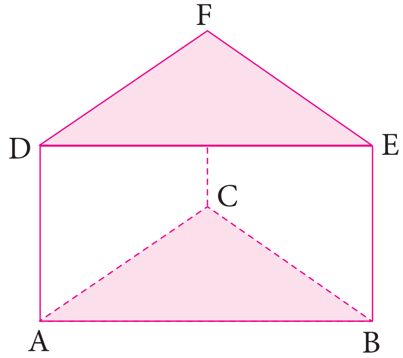
Tabanları birbirine eş çokgen, yan yüzleri tabana dik ve yan yüz ayrıtları birbirine eşit olan cisimlere **dik prizma** denir. Yan yüz ayrıtlarına prizmanın **yüksekliği** denir.

Örnek

Yandaki üçgen dik prizma modelinin temel elemanlarını belirleyerek yüzey açınımını çizelim.



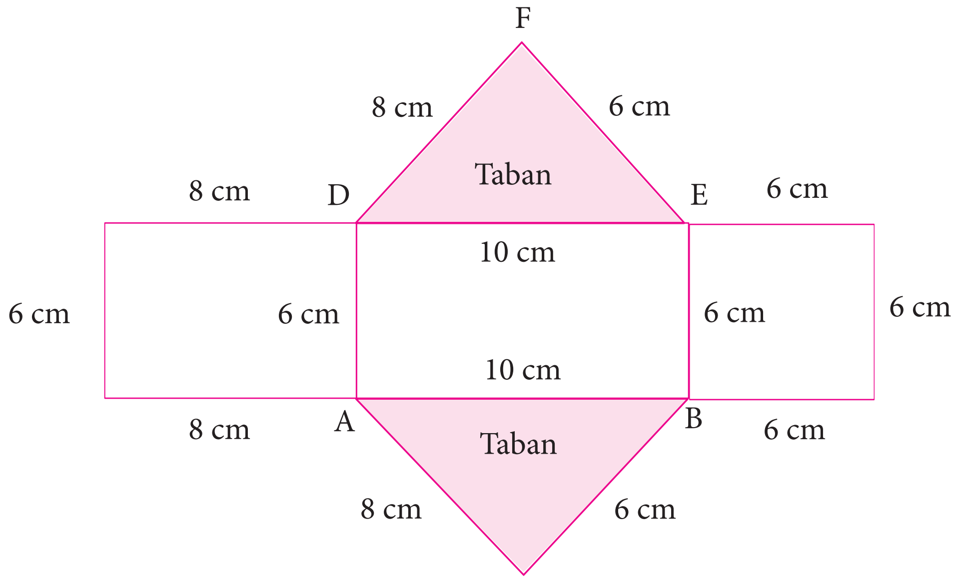
Çözüm



Üçgen dik prizmanın temel elemanlarını inceleyelim. A, B, C, D, E ve F noktaları prizmanın köşe noktalarıdır. ABC ve DEF üçgensel bölgeleri prizmanın tabanlarıdır.[AB], [BC], [CA], [AD], [BE], [CF], [DE], [EF] ve [DF] prizmanın ayrıtlarıdır.

ABED, BCFE ve ACFD dikdörtgensel bölgeleri prizmanın yan yüzleridir.

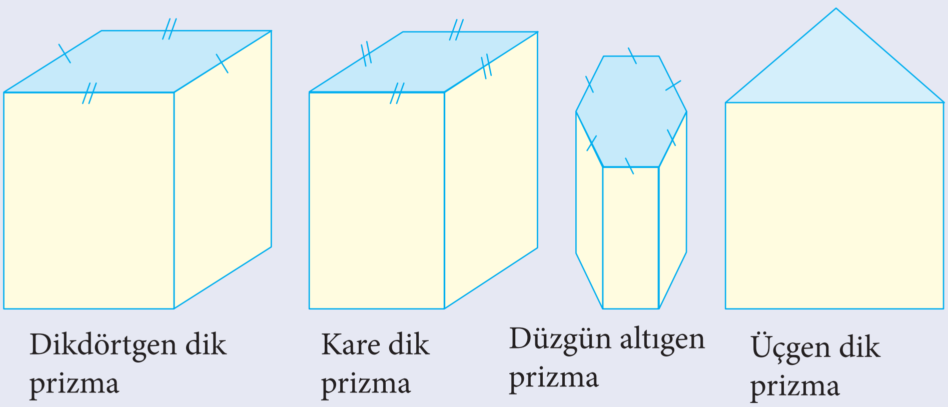
[AD], [BE] ve [CF] prizmanın yüksekliğidir. Üçgen prizmanın 5 yüzü 9 ayrıtı ve 6 köşesi vardır. Karşılıklı yüzleri birbirine paralel ve eşittir.



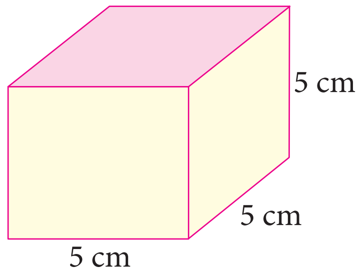
Üçgen dik prizmanın açınımı yukarıdaki gibidir.

BİLGİ KUTUSU

Prizmalar taban şekillerine göre isimlendirilir.



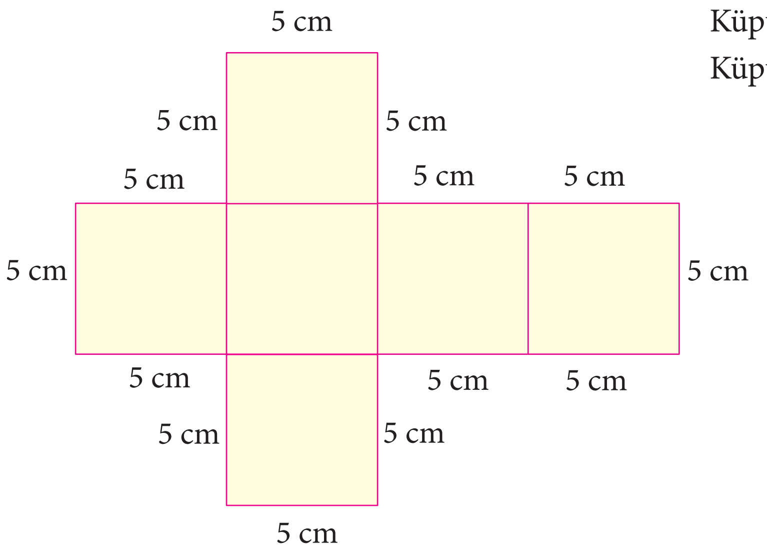
Örnek



Yandaki dik prizmanın bütün ayrıtlarının uzunluğu 5 br dir. Prizmayı inceleyelim.

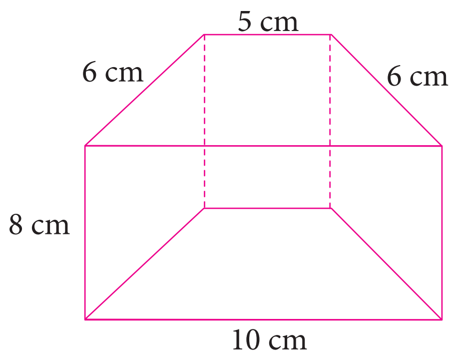
Çözüm

Bütün yüzleri birbirine eş karelerden oluşan dikdörtgen dik prizmaya küp denir. Küpün açınımı aşağıdaki gibidir.



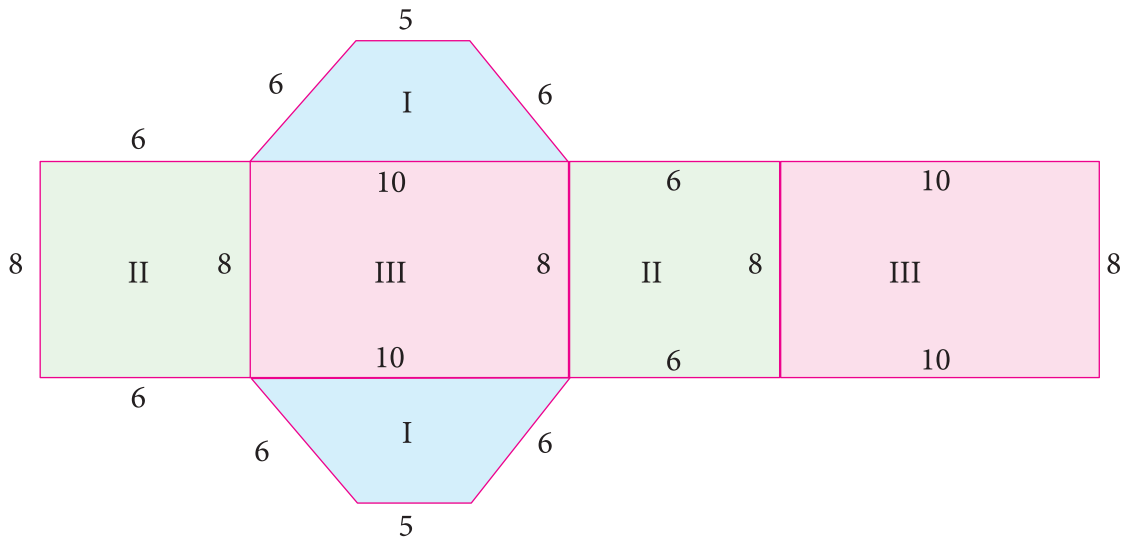
Küpün bütün ayrıt uzunlukları eştir. Küpün bütün yüzeyleri eşittir.

Örnek



Yandaki dörtgen dik prizmanın çevre uzunluğunu bulalım.

Çözüm



Prizmada karşılıklı yüzeyler birbirine eş olduğundan

$$2 \cdot (6 + 10 + 6 + 5) + 2 \cdot (8 + 6 + 8 + 6) + 2 \cdot (10 + 8 + 10 + 8)$$

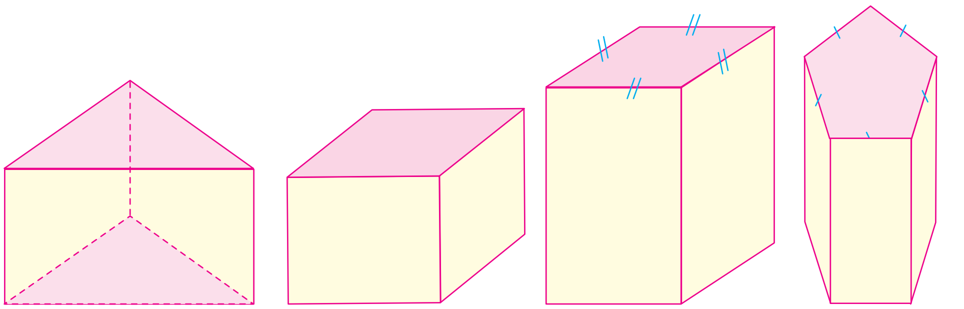
$$= 2 \cdot 27 + 2 \cdot 28 + 2 \cdot 36$$

$$= 54 + 56 + 72$$

$$= 182 \text{ cm bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1- **Aşağıda verilen dik prizmaları isimlendiriniz.**

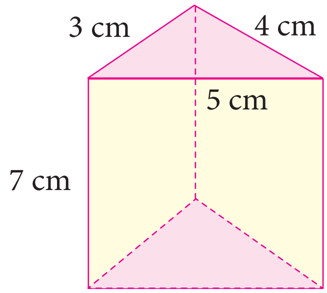


-------------------- -------------------- -------------------- ---------------

2- Aşağıdaki boşlukları uygun ifadeler ile doldurunuz.

Prizmanın Adı	Yüz sayısı	Köşe sayısı	Ayrıt sayısı
Yedigen dik prizma			
Küp			
Onikigen dik prizma			
Kare dik prizma			

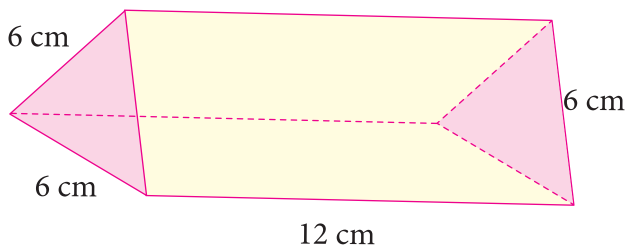
3-



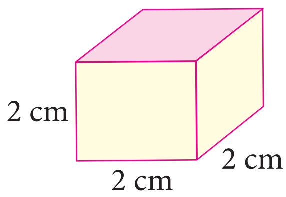
Yandaki üçgen dik prizmanın çevre uzunluğunu bulunuz.

4- Aşağıdaki dik prizmaların açınımlarını yapınız.

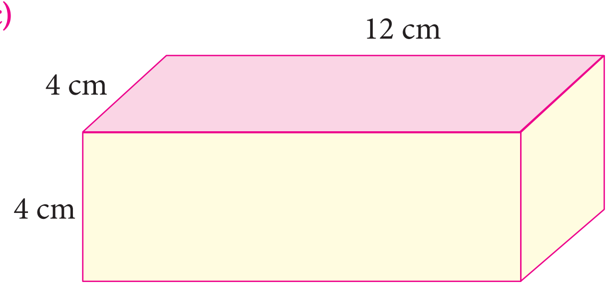
a)



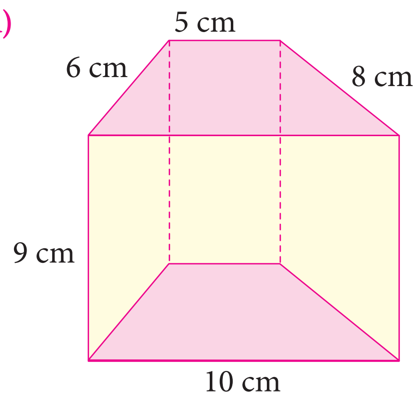
b)



c)



d)



Dik Dairesel Silindir

Yandaki görselde verilen cismi inceleyiniz. Çevremizde bu cisimlere benzeyen cisimlere örnek veriniz. Bu nesnenin hangi geometrik cisme model olabileceğini düşününüz.

Örnek

Aşağıdaki cisimleri inceleyelim.

Çöp kovası

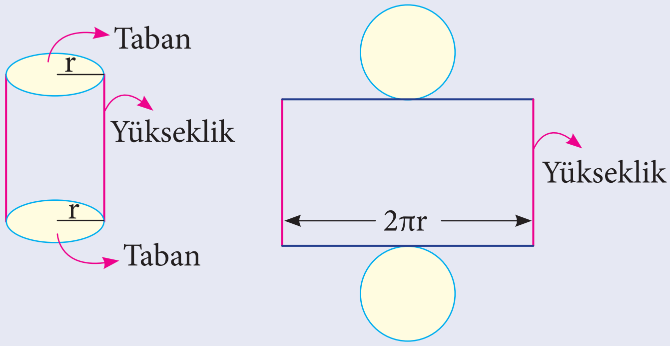
Makara

Kavanoz

Çözüm

Çöp kovası, makara ve kavanozun ortak özelliği alt ve üst tabanlarındaki daire şekilleridir. Cisimlerin yan yüzlerini bir kumaş ile kapladımızda ise kumaşın dikdörtgen şeklinde olduğunu görürüz.

BİLGİ KUTUSU



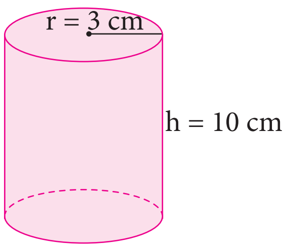
Bir dikdörtgen ile birbirine eş iki daireden oluşan cisme **silindir** denir. Birbirine eş daireler silindirin **taban**larıdır. Dairenin yarıçapı **r** ile gösterilir. Bir kenarı dairenin çevre uzunluğuna eşit olan dikdörtgen ise silindirin yan yüzeyidir. Silindirin üst tabanından alt tabanına indirilen dikmeye **yükseklik** denir ve **h** ile gösterilir.

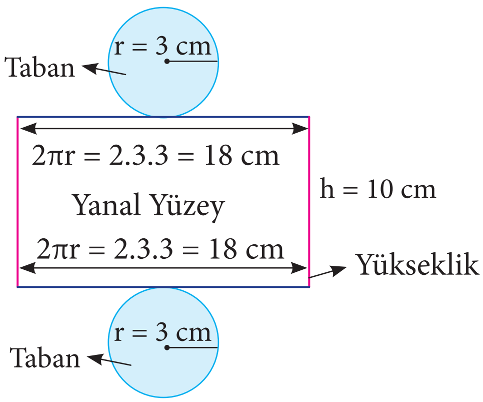
Silindirin tabanlarının merkezini birleştiren doğruya **eksen** denir. İki taban arasındaki eksenlere paralel doğrulara **silindirin ana doğruları** denir. Silindirin ayrıtı ve köşesi yoktur. 2 tabanı ve 1 yanal yüzey vardır.

Örnek

Taban yarıçapı 3 cm yüksekliği 10 cm olan dik dairesel silindirin açınımını çizerek temel elemanlarını belirleyelim. ($\pi = 3$ alınız)

Çözüm



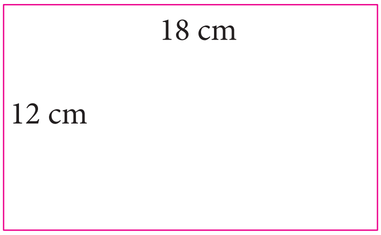


Yanal yüzeyin açınımında oluşan dikdörtgenin kenar uzunluklarından biri silindirin yüksekliği iken diğeri tabanın çevresine eşittir.

Dairenin çevresi $= 2\pi \cdot r$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \text{ cm}$$

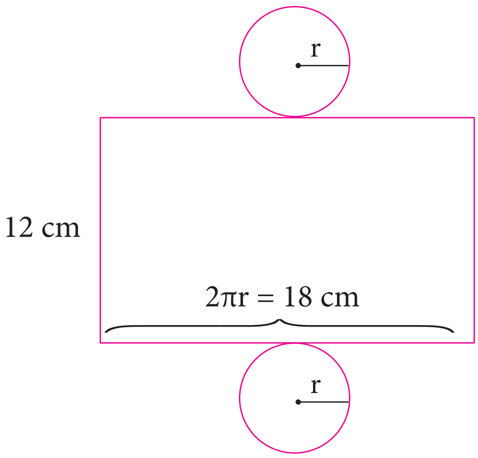
Örnek

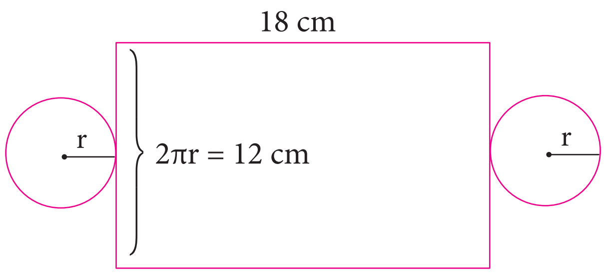


Yanda yanal yüzeyinin açınımı verilen dik dairesel silindirin tabanını oluşturan dairenin yarıçap uzunluğunun kaç olabileceğini bulalım. ($\pi = 3$ alınız)

Çözüm

Dik dairesel silindirde taban dairesinin çevresi dikdörtgenin bir kenar uzunluğuna eşittir.



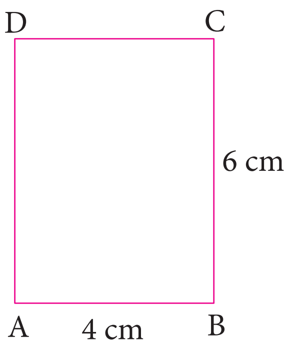


$2\pi r = 18$ cm
$2.3.r = 18$
$6r = 18$
$\frac{6r}{6} = \frac{18}{6}$
$r = 3$ cm

$2\pi r = 12$ cm
$2.3.r = 12$
$6r = 12$
$\frac{6r}{6} = \frac{12}{6}$
$r = 2$ cm

Silindirin tabanının yarıçap uzunluğu 2 cm ya da 3 cm olabilir.

Örnek



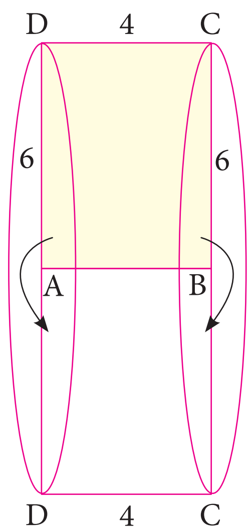
Yanda verilen ABCD dikdörtgenin

a) AB kenarı etrafında

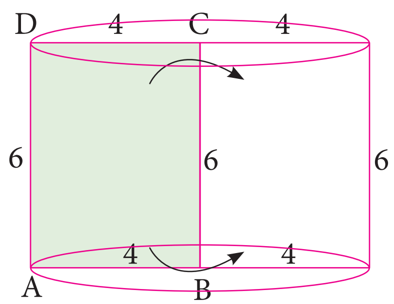
b) BC kenarı etrafında

360° döndürülmesiyle oluşan şekilleri çizelim.

Çözüm

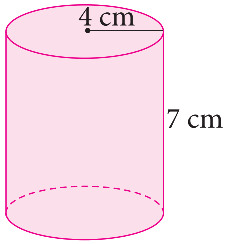


Yarıçap r = 6 cm yüksekliği 4 cm olan dik dairesel silindir oluşur.

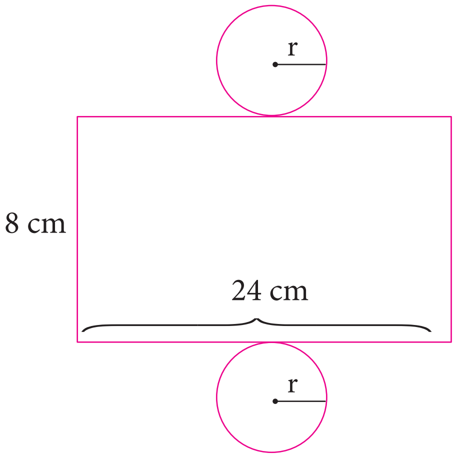


Yarıçap r = 4 cm yüksekliği 6 cm olan dik dairesel silindir oluşur.

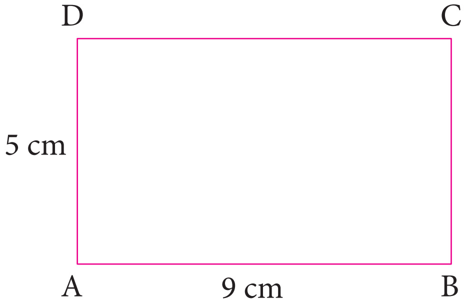
ALIŞTIRMALAR

1- 

Yanda yarıçapı 4 cm, yüksekliği 7 cm olan dik dairesel silindirin açınımını yapınız.

2- 

Yanda yanal yüzeyinin uzunlukları 8 cm ve 24 cm olan dik dairesel silindirin açınımı verilmiştir. Silindirin yarıçap uzunluğunu bulunuz.

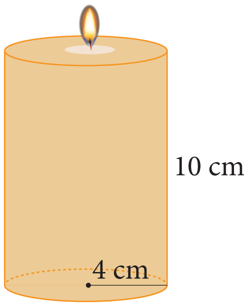
3- 

ABCD dikdörtgeninin AB kenarı etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan şekli çiziniz.

Dik Dairesel Silindirin Yüzey Alanı

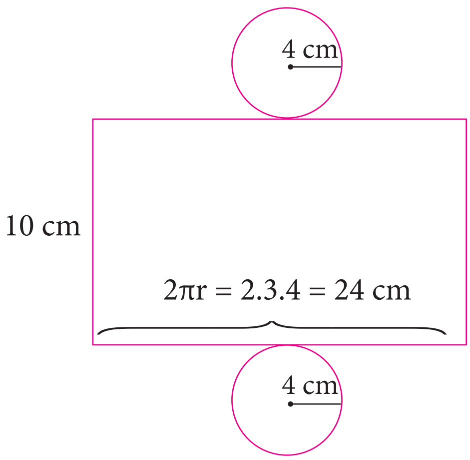
Boya yapan bir boyacı, elindeki ruloyu kaç sefer döndürerek duvarı boyayabileceğini hesaplamaya çalışıyor. Sizce boyacının elindeki rulonun yüzey alanı ile duvarın yüzey alanı arasında nasıl bir ilişki vardır?

Örnek



Arkadaşına dik dairesel silindir şeklinde mum hediye alan Erdem'in hediye paketi için en az kaç cm^2 kağıda ihtiyacı olduğunu bulalım. ($\pi = 3$ alınız)

Çözüm



Silindir şeklinde olan mumun açınımını çizelim.

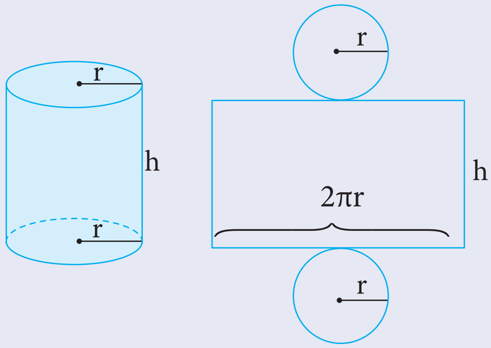
Tabandaki Dairelerin Alanı: $2 \cdot (\pi r^2) = 2 \cdot (3 \cdot 16)$
$= 2 \cdot 48$
$= 96 \text{ cm}^2$

Yanal Yüzeyin Alanı : $10 \cdot 24 = 240 \text{ cm}^2$
Silindirin Alanı : $240 + 96 = 336 \text{ cm}^2$

Hediye paketi için 336 cm^2 kağıda ihtiyacımız vardır.

BİLGİ KUTUSU

Silindirin yüzey alanı iki taban alanı ile yanal yüzeyin alanının toplamına eşittir.



Taban alanı = $\pi \cdot r^2$

Yanal yüzey alanı = $2\pi \cdot r \cdot h$

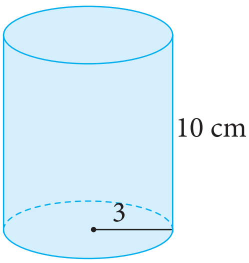
Silindirin Yüzey Alanı = $2(\pi r^2) + 2\pi\ r \cdot h$

Örnek

Taban yarıçapı 3 cm, yüksekliği 10 cm olan dik dairesel silindirin yüzey alanını bulalım.

Çözüm

Silindirin taban ve yanal yüzey alanını hesaplayalım.

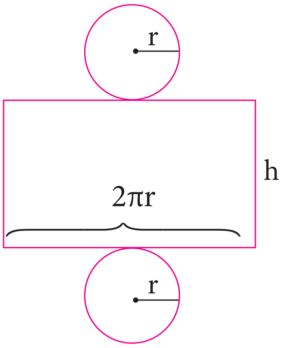


$$
\begin{aligned}
\text{Taban Alanı} &= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \\
\text{Yanal Yüzey Alanı} &= 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 60\pi \\
\text{Silindirin Yüzey Alanı} &= 2 \cdot 9\pi + 60\pi \\
&= 18\pi + 60\pi \\
&= 78\pi \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

Örnek

Taban yarıçapı 5 cm ve yanal yüzey alanı 100π cm^2 olan dik dairesel silindirin yüzey alanı kaç cm^2 dir?

Çözüm



Yanal Yüzey Alanı $= 2\pi r \cdot h$

$100\pi = 2\pi \cdot 5 \cdot h$

$$\frac{\cancel{100}\pi}{\cancel{10\pi}} = \frac{\cancel{10\pi} \cdot h}{\cancel{10\pi}}$$

$h = 10$ cm olur.

Taban Alanı $= \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi$

Silindirin Yüzey Alanı $= 2(25\pi) + 100\pi$

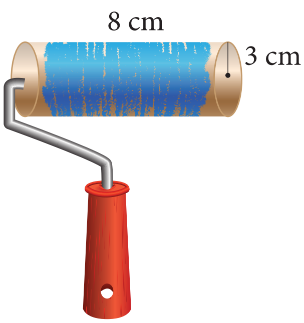
$= 50\pi + 100\pi$

$= 150\pi$ bulunur.

Örnek

Yarıçapı 3 cm ve yüksekliği 8 cm olan dik dairesel silindir şeklindeki bir rulo ile 1440 cm^2 lik duvarı boyayacaktır. Duvarı boyayabilmesi için ruloyu kaç defa döndürmesi gerektiğini bulalım. ($\pi = 3$ alınız)

Çözüm



Rulonun bir turu, yanal yüzey alanı kadar bölgeyi boyar.

Rulonun yanal yüzey alanı $= 2\pi r \cdot h$

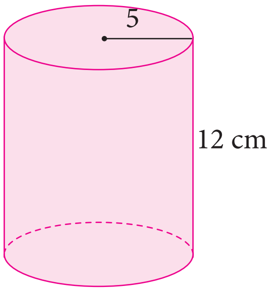
$= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8$

$= 144\ cm^2$

$$\frac{1440}{144} = 10$$

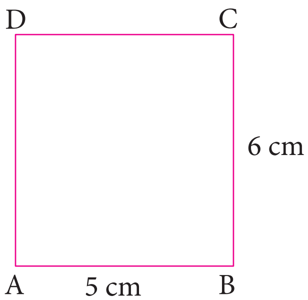
Ruloyu 10 tur döndürdüğünde duvar boyanır.

ALIŞTIRMALAR

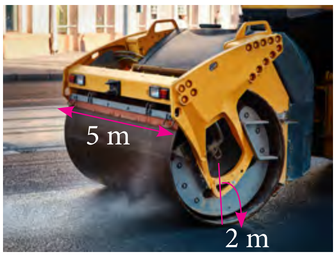
1- 

Yandaki dik dairesel silindirin yanal yüzey alanını bulunuz. ($\pi = 3$ alınız.)

2- Yanal yüzey alanı 30 cm^2 olan dik dairesel silindirin taban alanı kaç cm^2 dir?

3- 

Yanda verilen ABCD dikdörtgeninin [BC] etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan dik dairesel silindirin yüzey alanı kaç π cm^2 dir?

4- 

Silindirin yarıçapı 2 m genişliği 5 m olan asfalt sıkıştırma aletinin 15 tur dönmesi ile yandaki çalışma bitmektedir.

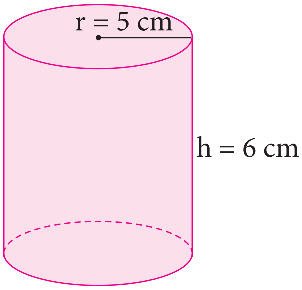
Yolda kaç m^2 lik alan sıkıştırılmıştır?

5- Taban yarıçapı yüksekliğine eşit olan dik dairesel silindirin yanal yüzey alanı 216 cm^2 ise tabanının alanı kaç cm^2 dir?

Dik Dairesel Silindirin Hacmi

Görseldeki gibi dik dairesel silindir şeklindeki ölçüm araçlarını mutfağımızda ya da yaptığımız bazı sıvı alışverişlerinde kullanmaktayız. Bu ölçüm araçlarının hacmini nasıl bulabileceğinizi düşürünüz.

Örnek



Taban yarıçapı 5 cm ve yüksekliği 6 cm olan dik dairesel silindirin hacmini bulalım. ($\pi = 3$ alınız.)

Çözüm

Dik dairesel silindir, tabanı daire olan özel bir prizma olduğundan silindirin hacmi de taban alanı ile yüksekliğini çarpımına eşittir. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
\text{Silindirin Hacmi} &= \text{Taban Alanı} \cdot \text{Yükseklik} \\
&= \pi\, r^2 \cdot h \\
&= 3 \cdot 5^2 \cdot 6 \\
&= 450 \text{ cm}^3 \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

Örnek

Dik dairesel silindir şeklindeki bardağın hacmi 480 cm^3 ve taban yarıçapı 4 cm ise yüksekliğini bulalım. ($\pi = 3$ alınız.)

Çözüm

Silindirin Hacmi = Taban Alanı · Yükseklik

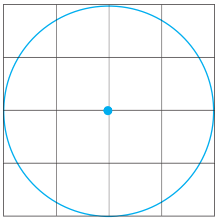
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

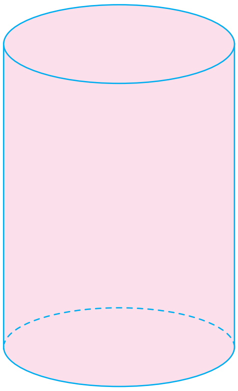
$$480 = 3 \cdot 4^2 \cdot h$$

$$480 = 3 \cdot 16 \cdot h$$

$$480 = 48 \cdot h \Rightarrow \quad h = \frac{480}{48} = 10 \text{ cm}$$ bulunur.

Örnek



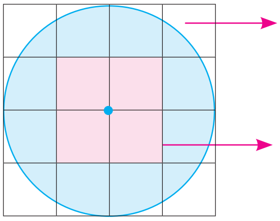


Yandaki kareli zemine tabanı çizilmiş olan dik dairesel silindirin yüksekliği 6 cm'dir.

Buna göre dik dairesel silindirin hacmini tahmin edelim.

Çözüm

Kareli zeminde verilen daireyi inceleyelim.



12 tane bölünmüş kare vardır.

4 tane tam kare vardır.

Buna göre tabanda tahminen 11 tane tamkare vardır.

Hacim = Taban Alanı · Yükseklik

$V = 11 \cdot 6 = 66 \text{ br}^3$

O hâlde dik dairesel silindirin tahmini hacmi 66 br^3 olur.

Dik dairesel silindirin hacmini işlem yaparak hesaplayalım ve tahminimiz ile karşılaştıralım.

$V = \pi r^2 \cdot h$

$V = 3 \cdot 2^2 \cdot 6$

$V = 72 \text{ br}^3$ olur.

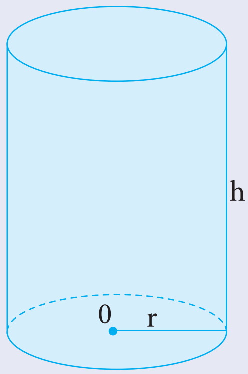
Bu durumda silindirin gerçek hacmi 72 br^3 olup tahminimizin gerçek sonuca yakın olduğunu söyleyebiliriz.

BİLGİ KUTUSU

- Dik dairesel silindir, tabanı daire olan bir dik prizmadır. Buna göre taban yarıçapı r, yüksekliği h olan dik dairesel silindirin hacmi: Taban alanı x Yükseklik

$$V = \pi r^2 \cdot h \text{ olur.}$$

- Dik dairesel silindirlerin hacmi tahmin edilirken dik prizmaların hacimlerinden yararlanırız. Silindirin tabanını oluşturan dairesel bölgenin kareli bir zeminde kapladığı alanı tahmin eder yükseklikle çarparak tahmini hacim değerini buluruz.

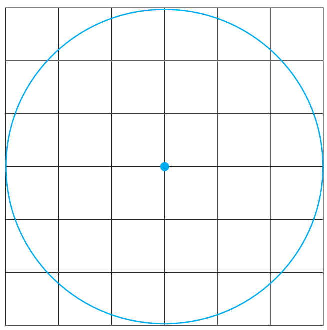


ALIŞTIRMALAR

1- **Taban yarıçapı 2 cm ve yüksekliği 5 cm olan dik dairesel silindirin hacmini bulunuz.** ($\pi = 3$ alınız.)

2- **Hacmi 180 cm^3 ve yüksekliği 15 cm olan dik dairesel silindirin taban yarıçapını bulunuz.** ($\pi = 3$ alınız.)

3- **Yandaki kareli zeminde tabanı verilen ve yüksekliği 3 br olan dik dairesel silindirin hacmini tahmin ediniz.**



Dik Piramidin Temel Elemanları ve Açınımı

Dünyaca ünlü Mısır Piramitleri, Mısır'da bulunan antik yapılardır. Bunların büyük çoğunluğu Eski ve Ortak Krallık dönemlerinde firavunlar ve eşleri için mezar olarak inşa edilmiştir.

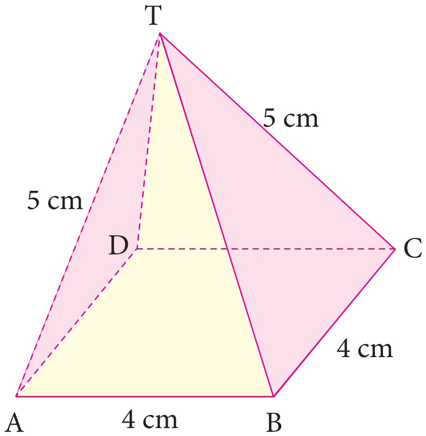
Görselde verilen Mısır Piramitlerini inceleyiniz.

Bu piramitleri hangi geometrik cisme örnek gösterebilirsiniz?

Bu cismin açınımı sizce nasıl çizilir? Düşününüz.

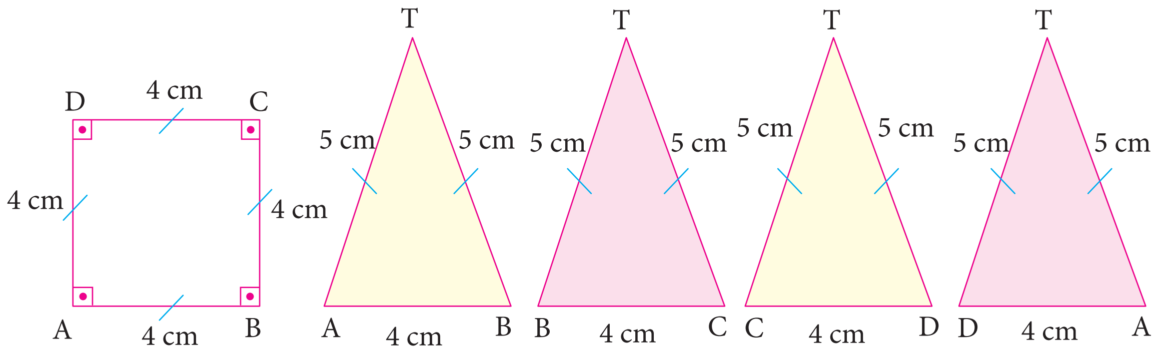
Örnek

Aşağıdaki kare dik piramidin temel elemanlarını belirleyelim. Açınımını çizip yeniden inşa edelim.

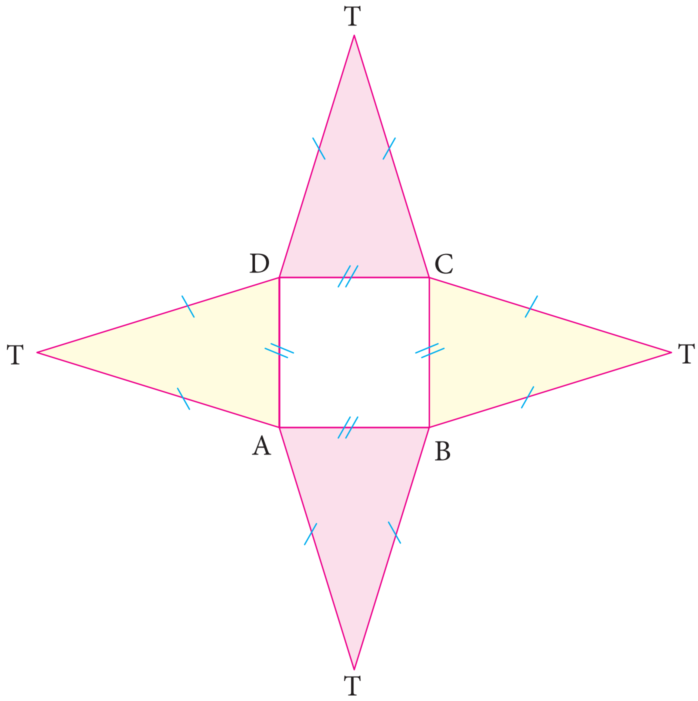


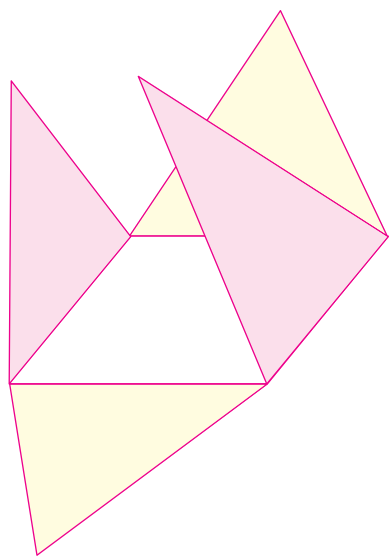
Çözüm

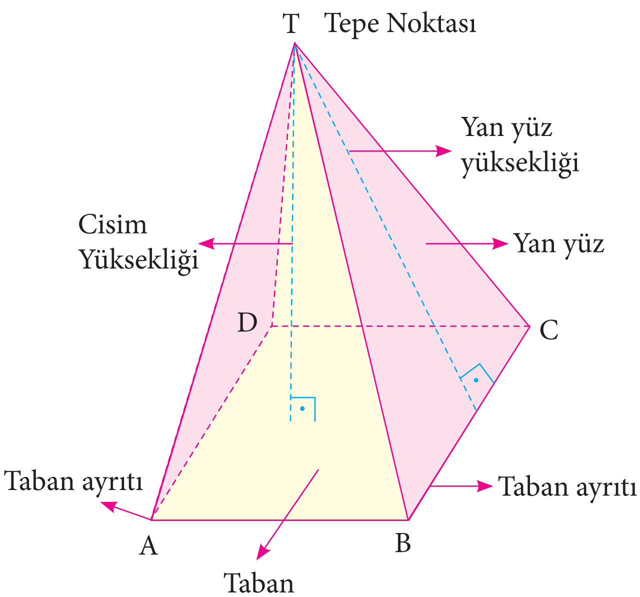
Kare dik piramidin tabanı bir karesel bölge ve yan yüzeyleri birbirine eş dört tane ikizkenar üçgenden oluşmaktadır. Bu ikizkenar üçgenlerin taban kenarı, karesel bölgenin bir kenarına eşittir. Verilen kare dik piramidin yüzeylerini çizelim.



Çizdiğimiz karesel ve üçgensel bölgeleri bir araya getirip verilen kare dik pramitin açınımını oluşturalım.







Kare dik piramidin temel elemanlarını inceleyelim.

- ABCD karesi piramidin tabanı, TAB, TBC, TCD ve TDA eş üçgenleri piramidin yan yüzeyleridir. Buna göre kare dik piramidin toplam 5 yüzü vardır.
- A, B, C, D ve T noktaları piramidin köşe noktalarıdır.

T noktası ayrıca piramidin tepe noktasıdır.

Buna göre kare dik piramidin 5 köşesi vardır.

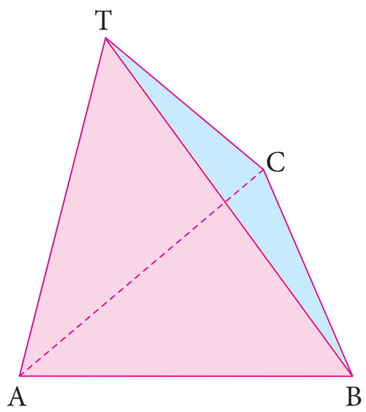
[AB], [BC], [CD] ve [DA] pramidin taban ayrıtları,

[TA], [TB], [TC] ve [TD] piramidin yan yüz ayrıtlarıdır.

Buna göre kare dik piramidin 8 ayrıtı vardır.

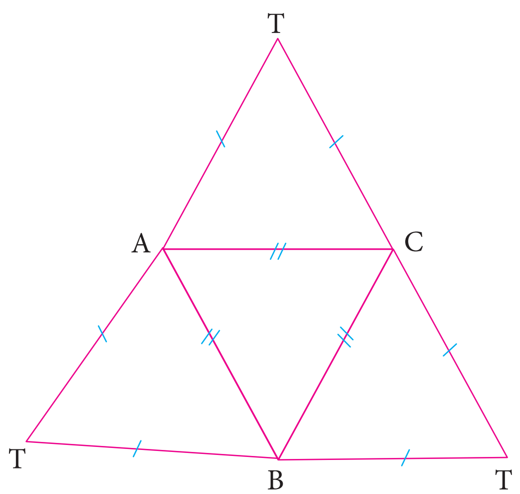
Örnek

Yandaki eşkenar üçgen dik piramidin açınımını çizelim. Yüz, ayrıt ve köşe sayısını bulalım.



Çözüm

Piramidin açınımını çizelim.

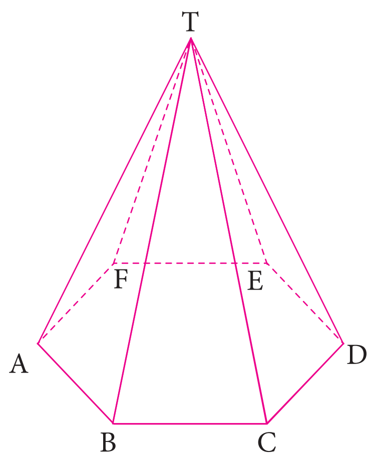


Eşkenar üçgen dik piramidin 4 yüzü, 6 ayrıtı ve 4 köşesi vardır.

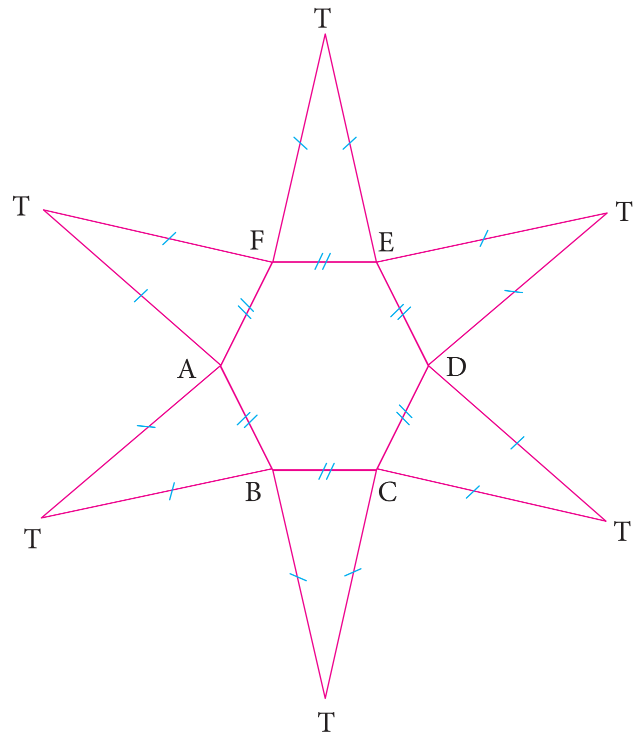
Örnek

Aşağıda düzgün altıgen dik piramit ve açınımı verilmiştir.

Verilen şekilleri inceleyip piramidin yüz, ayrıt ve köşe sayılarını bulalım.



Düzgün Altıgen
Dik Piramit



Düzgün Altıgen
Dik Piramit Açınımı

Çözüm

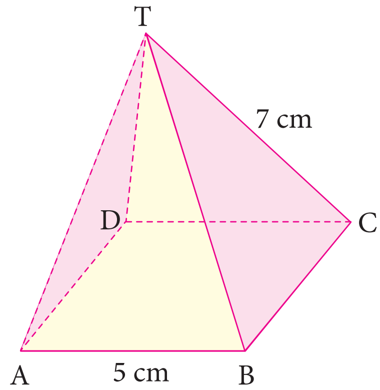
Altıgen piramidin 7 yüzü, 12 ayrıtı ve 7 köşesi vardır.

BİLGİ KUTUSU

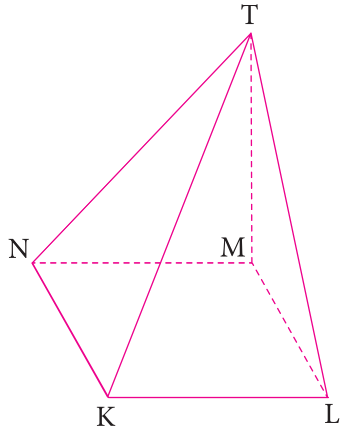
- Tabanı, herhangi bir çokgen ve yan yüzeyleri, tepe noktaları ortak olan ikizkenar üçgenlerden oluşan geometrik cisme **piramit** denir. Piramitler taban şekillerine göre adlandırılır. Örneğin, kare piramit, üçgen piramit altıgen piramit gibi.
- Tepe noktası ile tabanının merkezinden geçen doğru, tabana dik ise bu piramide **dik piramit** denir.
- Pirimadin tepe noktasından, tabanına inen dik doğru parçasına **piramidin yüksekliği** denir.
- Piramidin tepe noktasından yan yüzündeki üçgenin taban kenarına çizilen dik doğru parıçasına **yan yüz yüksekliği** denir.
- Piramidin tepe noktası, yan yüzleri, tabanın ayrıtları ve yüksekliğine **piramidin temel elemanları** denir.

ALIŞTIRMALAR

1- **Yandaki kare dik piramidin ayrıt uzunlukları toplamı kaç cm'dir?**



2- **Yanda verilen dikdörtgen dik prizmanın açınımını çiziniz.**

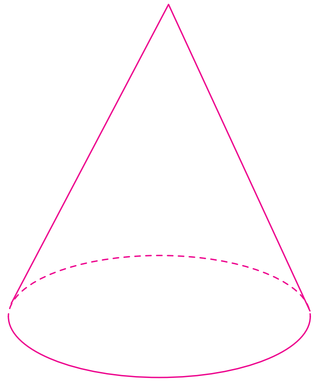


Dik Koninin Temel Elemanları ve Açınımı

Yandaki görselleri inceleyip, hangi geometrik cisme örnek olduklarını söyleyiniz. Bu geometrik cismin açınımını nasıl çizebilirsiniz? Düşününüz.

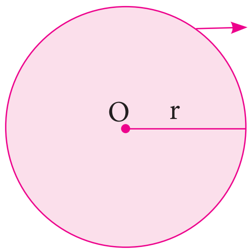
Örnek

Yandaki dik koninin temel elemanlarını belirleyelim. Açınımını çizip yeniden inşa edelim.

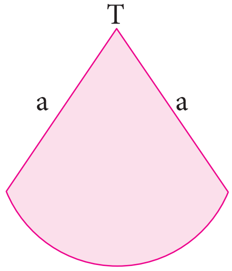


Çözüm

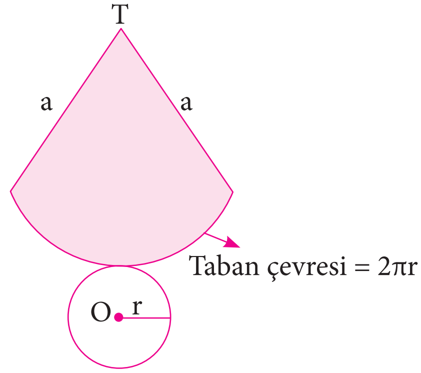
- Koninin tabanı için r yarıçaplı bir dairesel bölge oluşturalım.



- Koninin yan yüzeyi için tabanını oluşturan dairesel bölgenin çevre uzunluğu ile aynı uzunluğa sahip daire dilimi oluşturalım.



- Dairesel bölge ile daire dilimini bir araya getirelim ve dik koninin açınımını oluşturalım.

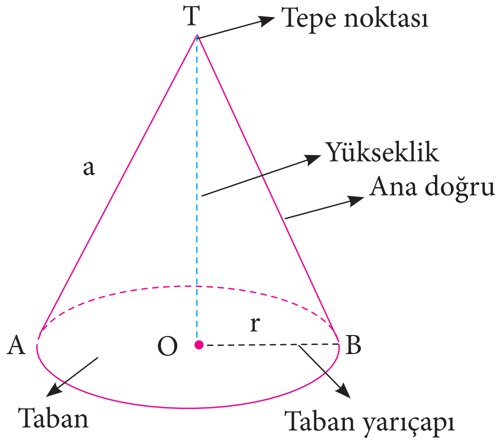


Dik koniyi inşa edelim.

Dik koninin temel elemanlarını inceleyelim.

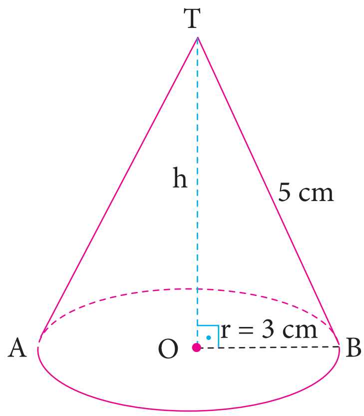
O merkezli daire koninin tabanı, koninin açınımındaki daire dilimi koninin yanal yüzeyidir. T noktası, koninin tepe noktası, [TA] ve [TB] koninin ana doğrularıdır.

Bu durumda dik koninin ayrıtı ve köşesi yoktur. 2 yüzü vardır.



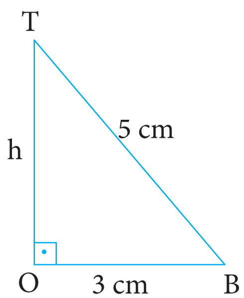
Örnek

Yanda taban yarıçapı 3 cm, ana doğrusunun uzunluğu 5 cm olan bir dik koni verilmiştir. Bu dik koninin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulalım.



Çözüm

Dik koninin yüksekliğini bulmak için TOB dik üçgeninde pisagor bağıntısını uygulayalım.

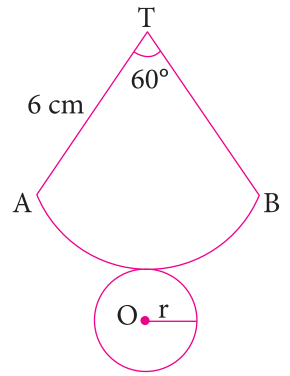


$h^2 + 3^2 = 5^2$
$h^2 + 9 = 25$
$h^2 = 25 - 9$
$h^2 = 16$
$\sqrt{h^2} = \sqrt{16^2}$
$h = 4$ cm olur.

Örnek

Yanda açınımı verilmiş olan dik koninin taban yarıçapının uzunluğunu bulalım.

($\pi = 3$ alınız)



Çözüm

Daire dilimine ait AB yayının uzunluğu ile oluşan koninin taban çevresi eşittir. Buna göre

Daire diliminin yay uzunluğu = Tabandaki dairenin çevresi

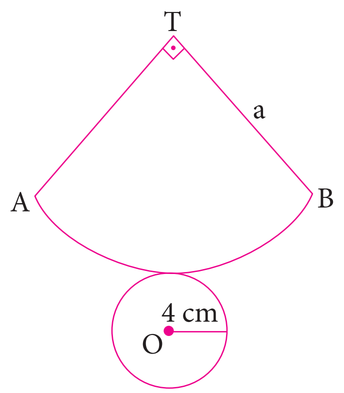
$$\frac{\cancel{60}°}{\underset{6}{\cancel{360}}°} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot r$$

$$\frac{\overset{6}{\cancel{36}}}{\cancel{6}} = 6 \cdot r$$

$$6 = 6r \Rightarrow r = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Yanda açınımı verilmiş olan dik koninin ana doğrusunun kaç cm olduğunu bulalım. ($\pi = 3$ alınız.)



Çözüm

Daire diliminin yay uzunluğu = Tabandaki dairenin çevresi

$$\frac{\cancel{90}°}{\underset{4}{\cancel{360}}°} \cdot 2 \cdot 3 \cdot a = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\frac{6a}{4} = 24$$

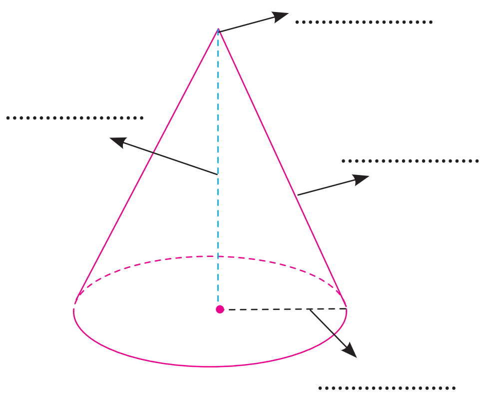
$$a = \frac{96}{4} \Rightarrow a = 16 \text{ bulunur.}$$

BİLGİ KUTUSU

- Dairesel bir bölgenin her noktasının daire dışındaki bir nokta ile birleşmesinden oluşan geometrik cisme **koni** denir. Koniler, tabanı daire olan bir tür piramittirler.
- Bir dik üçgensel bölgenin, dik kenarlarından birinin etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan geometrik cisme **dik koni** denir.
- Dik koninin tepe noktasından, tabanı oluşturan dairesel bölgenin merkezine inen dik doğru parçasına **yükseklik** denir. Koninin yüksekliği aynı zamanda eksenidir.
- Koninin tabanının her noktasını tepe noktası ile birleştiren tüm doğru parçalarının oluşturduğu yüzeye koninin **yanal yüzeyi** denir.

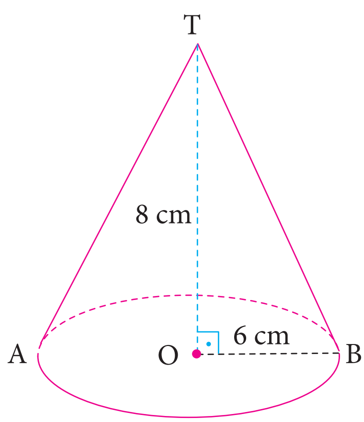
ALIŞTIRMALAR

1- **Yandaki dik koninin temel elemanları oklarla gösterilmiştir. Bu okların yanına gösterdiği temel elemanın adını yazınız.**



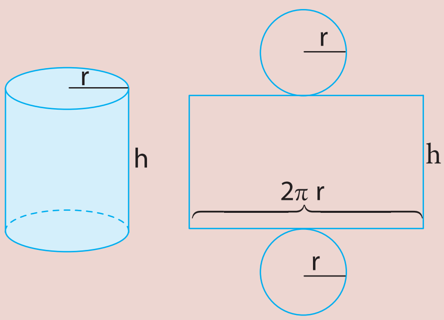
2- Yanda taban yarıçapı 6 cm ve yüksekliği 8 cm olan dik koni verilmiştir.

Buna göre koninin ana doğrusunun kaç cm olduğunu bulunuz ve açınımını çiziniz.



ÖZET

- Nokta, doğru parçası veya düzlemsel şekillerin sağa, sola,yukarı veya aşağı doğru hareket ettirilmesine öteleme denir.
- Bir şeklin bir doğruya göre oluşan simetrisine şeklin yansıması denir. Şekil ile simetriği arasında bulunan doğruya **simetri doğrusu** denir. Yansımada şekil ile simetriği üzerindeki birbirine karşılık gelen noktalar simetri doğrusuna diktir ve aralarındaki uzaklık birbirine eşittir. Dolayısıyla görüntüsü ile şekil birbirine eştir.
- A(x, y) noktasının x eksenine göre yansıması $A^{I}(x, -y)$ olur.
- A(x, y) noktasının y eksenine göre yansıması $A^{I}(-x, y)$ olur.
- Tabanları birbirine eş çokgen, yan yüzleri tabanı dik ve yan yüz ayrıtları birbirine eşit olan cisimlere dik pirizma denir.
- Yan yüz ayrıtlarına prizmanın yüksekliği denir.
- Prizmalar taban şekillerine göre isimlendirilir.
- Bütün yüzleri birbirine eş karelerden oluşan dikdörtgen dik prizmaya **küp** denir.
- Bir dikdörtgen ile birbirine eş iki daireden oluşan cisme silindir denir. Birbirine eş dairelere silindirin tabanları denir.
- Dairenin yarıçapı **r** ile gösterilir. Bir kenarı dairenin çevre uzunluğuna eşit olan dikdörtgen ise silindirin yan yüzeyidir.
- Silindirin üst tabanından alt tabanına indirilen dikmeye **yükseklik** denir ve **h** ile gösterilir.
- Silindirin tabanlarının merkezini birleştiren doğruya **eksen** denir.
- İki taban arasındaki eksene paralel doğrulara **silindirin ana doğruları** denir. Silindirin ayrıtı ve köşesi yoktur. 2 tabanı 1 yanal yüzeyi vardır.
- Silindirin yüzey alanı iki taban alanı ile yanal yüzey alanının toplamına eşittir.



Taban Alanı = πr^2

Yanal Yüzey Alanı = $2\pi r \cdot h$

Silindirin Yüzey Alanı = $2(\pi r^2) + 2\pi r \cdot h$

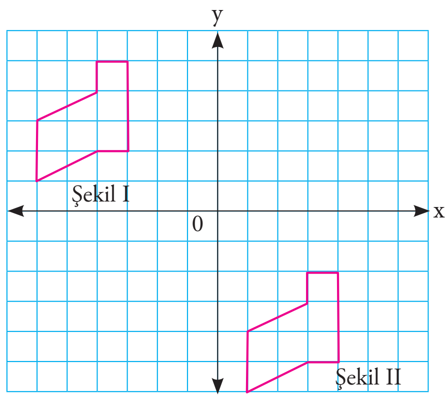
- Dik dairesel silindir, tabanı daire olan bir dik prizmadır.
- Buna göre taban yarıçapı r, yüksekliği h olan dik dairesel

  silindirin hacmi: Taban Alanı x Yükseklik

  $V = \pi r^2 \cdot h$ olur.
- Dik dairesel silindirin hacmi tahmin edilirken dik prizmaların hacimlerinden yararlanırız. Silindirin tabanını oluşturan dairesel bölgenin kareli bir zeminde kapladığı alanı tahmin eder yükseklikle çarparak tahmini hacim değerini buluruz.
- Tabanı herhangi bir çokgen ve yan yüzeyleri, tepe noktaları ortak olan ikizkenar üçgelerden oluşan geometrik cisme **piramit** denir. Piramitler taban şekillerine göre adlandırılırlar.
- Tepe noktası ile tabanın merkezinden geçen doğru tabana dik ise bu piramide **dik piramit** denir.
- Piramidin tepe noktasından, tabanına inen dik doğru parçasına **piramidin yüksekliği** denir.
- Piramidin tepe noktasından, yan yüzündeki üçgenin taban kenarına çizilen dik doğru parçasına **piramidin yan yüz yüksekliği** denir.
- Piramidin tepe noktası yan yüzleri, tabanı ayrıtları ve yükseliğine **piramidin temel elemanları** denir.
- Dairesel bir bölgenin her noktasının daire dışındaki bir nokta ile birleşmesinden oluşan geometrik cisme **koni** denir. Koniler, tabanı daire olan bir tür piramittirler.
- Bir dik üçgensel bölgenin, dik kenarlarından birinin etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan geometrik cisme **dik koni** denir.
- Dik koninin tepe noktasından tabanı oluşturan dairesel bölgenin merkezine inen dik doğru parçasına **yükseklik** denir. Koninin yüksekliği aynı zamanda eksenidir.
- Koninin tabanının her noktasını tepe noktasi ile birleştiren tüm doğru parçalarının oluşturduğu yüzeye koninin **yanal yüzeyi** denir.

6. ÜNİTE
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Koordinat sisteminde verilen 1. Şekil ötelenerek 2. Şekil elde ediliyor.



Buna göre 1. Şekle uygulanan öteleme aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 birim sola, 5 birim aşağı

B) 5 birim sağa, 7 birim aşağı

C) 7 birim sağa, 7 birim aşağı

D) 7 birim sağa, 5 birim yukarı

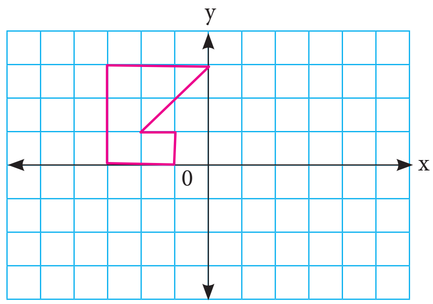
2. A(3, 4) noktasının 3 birim sola 5 birim aşağı ötelenmiş hâli A(x, y) dir. B(–2, 1) noktasının y eksenine göre yansıması B(m, n) dir.

Buna göre x + y + m +n değeri kaçtır?

A) 5 B) 4

C) 3 D) 2

3.



Yukarıdaki koordinat sisteminde verilen şeklin x eksenine göre yansımasının 5 br sağa 2 br aşağıya ötelenmiş halinin köşe koordinatlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) (5, 1) B) (–3, 4)

C) (3, –3) D) (2, 2)

4. Sekizgen dik prizma ile ilgili verilen bilgilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Ayrıt sayısı 24'tür.

B) Yanal yüzeyi 16 tane dikdörgensel bölgedir.

C) Köşe sayısı 16'dır.

D) Alt taban ile üst taban birbirine eştir.

5. **Dik prizma ile ilgili aşağıda verilen bilgilerden hangisi doğrudur?**

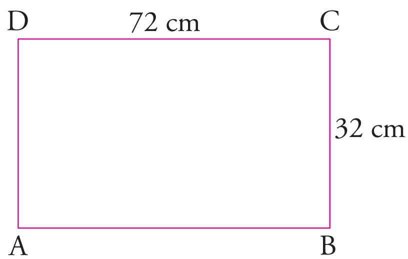
A) Dik prizmalar yan yüzlerinin şekline göre isimlendirilir.

B) Dik prizmalarda yükseklik tabanın bir kenar uzunluğudur.

C) Dik prizmaların ayrıt sayısı tabanın kenar sayısının iki katıdır.

D) Küp, bütün yüzeyleri birbirine eş kare olan dik prizmadır.

6.



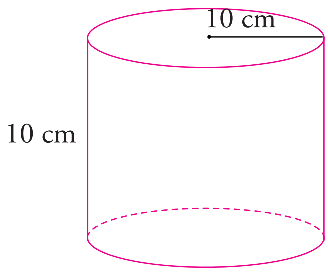
Yukarıda dikdörtgen şeklindeki kartonu [AD] ve [BC] üst üste gelecek şekilde kıvırarak dik dairesel silindir elde ediliyor.

Bu silindirin taban alanı kaç cm^2 dir?
(π = 3 alınız.)

A) 432 B) 360

C) 240 D) 144

7.



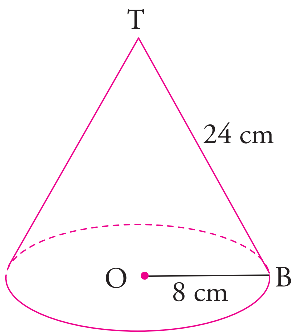
Yukarıda yarıçapı 10 cm yüksekliği 10 cm olan dik dairesel silindir şeklinde yakıt deposu veriliyor.

Depo kaç m^3 yakıt alır?

A) 100π B) 1000π

C) 1200π D) 1440π

8.

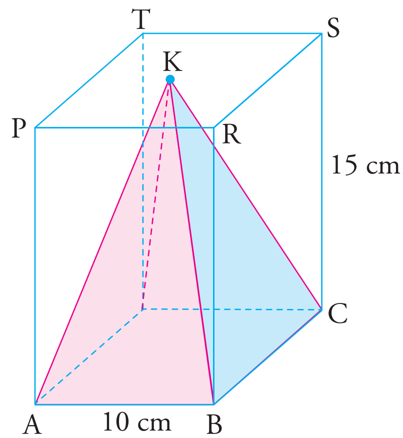


Yukarıda taban yarıçapı 8 cm anadoğrusu 24 cm olan koninin açınımında merkez açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 90° B) 120°

C) 150° D) 180°

9.



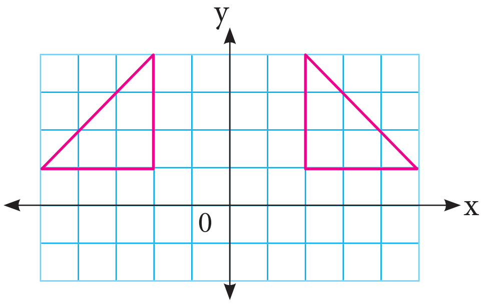
Kenar uzunluğu 10 cm, yüksekliği 15 cm olan kare dik prizmanın içine tabanları aynı olacak şekilde yerleştirilen dik piramidin hacmi kaç cm^3 tür?

A) 300 B) 400

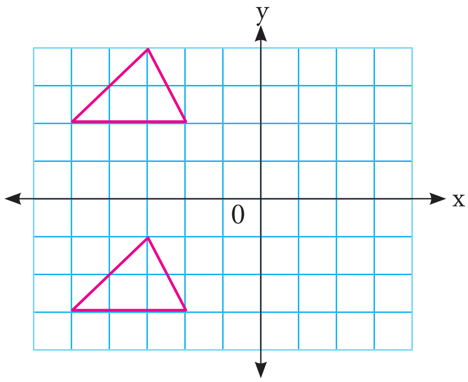
C) 500 D) 900

10. **Aşağıdakilerden hangisinde verilen üçgenler birbirinin x eksenine göre yansımasıdır?**

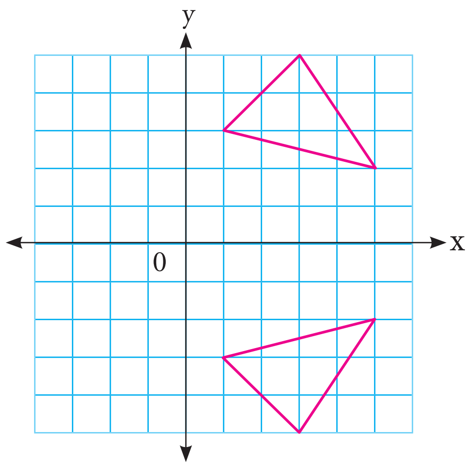
A)



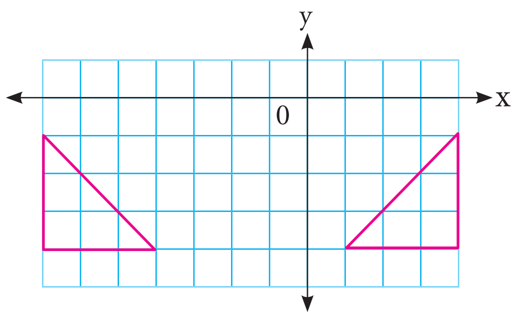
B)



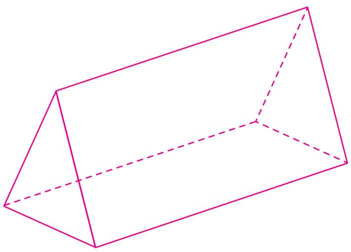
C)



D)

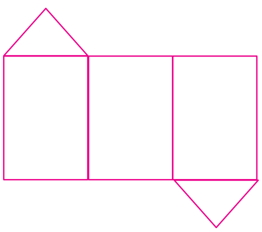


11.

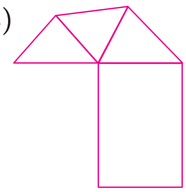


Yanda verilen dik prizmanın açınımı aşağıdakilerden hangisidir?

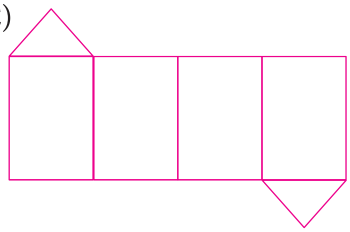
A)



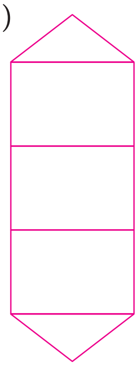
B)



C)



D)



CEVAP ANAHTARI

1. ÜNİTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	C	A	A	D	B	B	C	D	C	A
	11	12	13							
	D	B	D							

DOĞRU SAYISI ☐ YANLIŞ SAYISI ☐

2. ÜNİTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	C	B	A	D	C	D	A	B	D	A
	11	12	13	14	15	16	17			
	C	D	A	A	D	B	D			

DOĞRU SAYISI ☐ YANLIŞ SAYISI ☐

3. ÜNİTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B	A	C	C	D	A	B	C	B	D

DOĞRU SAYISI ☐ YANLIŞ SAYISI ☐

4. ÜNİTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	A	B	B	D	B	D	C	A	D	B
	11	12	13							
	A	A	C							

DOĞRU SAYISI | YANLIŞ SAYISI

5. ÜNİTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B	C	D	C	A	B	B	A	A	C
	11	12	13							
	D	D	B							

DOĞRU SAYISI | YANLIŞ SAYISI

6. ÜNİTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	C	D	A	B	D	A	B	B	C	C
	11									
	A									

DOĞRU SAYISI | YANLIŞ SAYISI

SÖZLÜK

A

açı: Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşim kümesidir.

açıortay: Bir açıyı iki eş açıya bölen ışın.

B

bağımlı değişken: Bağımsız değişkene bağlı olarak değişen değişkendir.

bağımsız değişken: Bizim müdahalemizle değiştirebildiğimiz değişkendir.

Ç

çarpanlara ayırma: Bir harfli ifadeyi en az iki ifadenin çarpımı şeklinde yazma.

çıktı: Bir deneyin mümkün olan her türlü sonucu.

D

dik kenarlar: Dik üçgenin dik açısına komşu olan kenarlar.

doğrusal denklem: İçerdikleri terim ve değişkenlerin sayısına bağlı olarak düzlemde bir doğru belirten denklemdir.

E

eğim: Bir yüzeyin yatay düzleme doğru az çok eğilmesi.

eşitsizlik: eşit olmama durumu.

eş olasılık: Eşit şansa sahip olayların çıktıları.

G

gerçek sayı: Rasyonel sayılarla, irrasyonel sayıların birleşiminden oluşan sayılar.

H

hacim: Bir cismin boşlukta kapladığı yer miktarı.

hipotenüs: Bir dik üçgende dik açının karşısında bulunan kenar.

İ

imkansız olay: Gerkçekleşmesi mümkün olmayan olay.

irrasyonel sayı: Payı ve paydası birer tam sayı olan bir kesir olarak ifade edilemeyen sayı.

K

karekök: Karesi verilen bir sayıya eşit olan sayı

kenarortay: Bir üçgende bir köşe ile karşısındaki kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçası.

kesin olay: Gerçekleşmesi kesin olan olay.

N

nokta: Hiçbir boyutu olmayan iz.

O

Olasılık: Bir olayın olma şansına (olabilirliğine) ilişkin bir ölçümdür.

olay: Olması istenen çıktıların kümesidir.

KAYNAKÇA

- Türkçe Sözlük, TDK Yayınları, Ankara, 2012.
- Yazım Kılavuzu, TDK Yayınları, Ankara, 2012.
- T.C. Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar), Ankara, 2018.

GENEL AĞ KAYNAKÇASI

- https://www.matematiksel.org
- https://www.bilimgenc.tubitak.gov.tr - www.oecd.org/turkey/ - www.eba.gov.tr - www.tuik.gov.tr
- www.dergipark.gov.tr

GÖRSEL KAYNAKÇA

- www.shutterstock.com (telif hakkı ödenerek satın alınmıştır.)
- Komisyonumuzun görsel tasarım uzmanlarının orjinal çizimleri

KISALTMALAR/SEMBOLLER

Kısaltmalar

°C: Derece Celcius

cm: Santimetre

cm^2: Santimetrekare

dm^2: Desimetrekare

cm^3: Santimetreküp

dk. : Dakika

dm^3: Desimetreküp

g: Gram

kg: Kilogram

km: Kilometre

kr.: Kuruş

L: Litre

m: Metre

m^2: Metrekare

m^3: Metreküp

mm: Milimetre

mm^2: Milimetrekare

mm^3: Milimetreküp

sa.: Saat

sn.: Saniye

TL: Türk lirası

Semboller

a^n: Üslü nicelik

. , x: Çarpma işareti

|a|: a'nın mutlak değeri

a : b, (a)/b, a / b: a'nın b'ye oranı

r: Yarıçap

R: Çap

π: Pi sayısı

$\widehat{A}$: A açısı

$m(\widehat{A})$: A açısının ölçüsü

[AB]: AB doğru parçası

|AB|: AB doğru parçasının uzunluğu

AB: AB doğrusu

[AB: AB ışını

$\overset{\triangle}{ABC}$: ABC üçgeni

A: Alan

>: Büyüktür

<: Küçüktür

Ç: Çevre

°: Derece

⊥: Diklik

=: Eşit

≠: Eşit değil

//: Paralellik

%: Yüzde

Q: Rasyonel sayılar kümesi

Q^+: Pozitif rasyonel sayılar kümesi

Q^-: Negatif rasyonel sayılar kümesi